

יסודות מערכות תובלה ושינוע

מודלים וכלים – המסלול הקצר

בעיית המסלול הקצר ביותר – Shortest Path Problem

הבעיה: מציאת המסלול הקצר ביותר (במה ?)

שימושים: לא קשה למצוא...

סוגי בעיות:

- מסלול הקצר ביותר מקדקוד אחד לשאר הקודקודים
- מסלול קצר ביותר מכל קדקוד לכל קדקוד אחר
- מסלול קצר ביותר מקודקוד אחד לקודקוד אחר
- k המסלולים הקצרים ביותר
- מסלול הקצר ביותר ברשת סטוכסטית

המסלול הקצר ביותר – אלגוריתמים

□ מסלול קצר ביותר מקודקוד לשאר הקודקודים

□ דיקסטר

□ Bellman-ford, Yen (ערכים כלשהם, גילוי לולאה שלילית)

□ מסלול קצר מכל הקודקודים לכל הקודקודים

□ Floyd (ערכים כלשהם, גילוי לולאה שלילית)

□ מסלול קצר מקודקוד אחד לקודקוד אחר

□ Nicholson

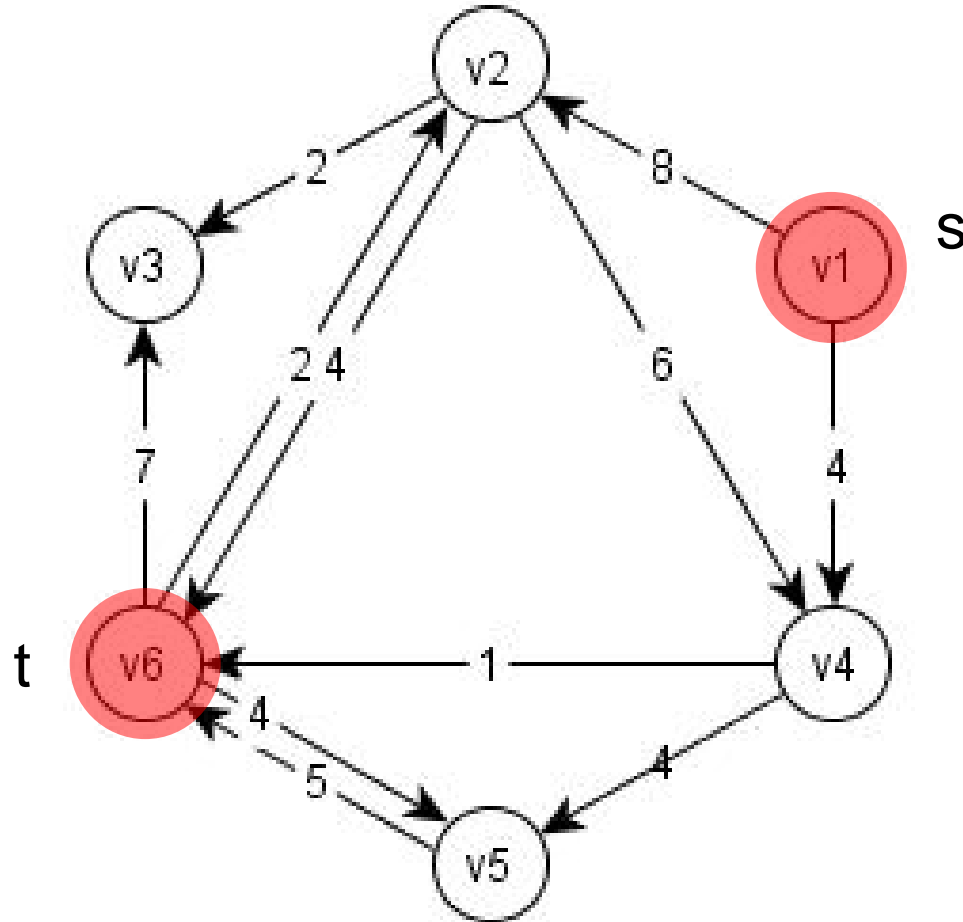
□ K-Shortest-Path

□ Shier, Hoffman & Pavley

□ מסלול קצר ברשת סטוכסטית

המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים

□ עבור רשת בעלת משקלים, $G=(V,E,w)$, מהו המסלול הקצר ביותר מקודקוד נתון, s , לקודקוד נתון, t .



המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים

□ עבור רשת בעלת משקלים, $G=(V,E,w)$, מהו המסלול הקצר ביותר מקודקוד נתון, s , לקודקוד נתון, t .

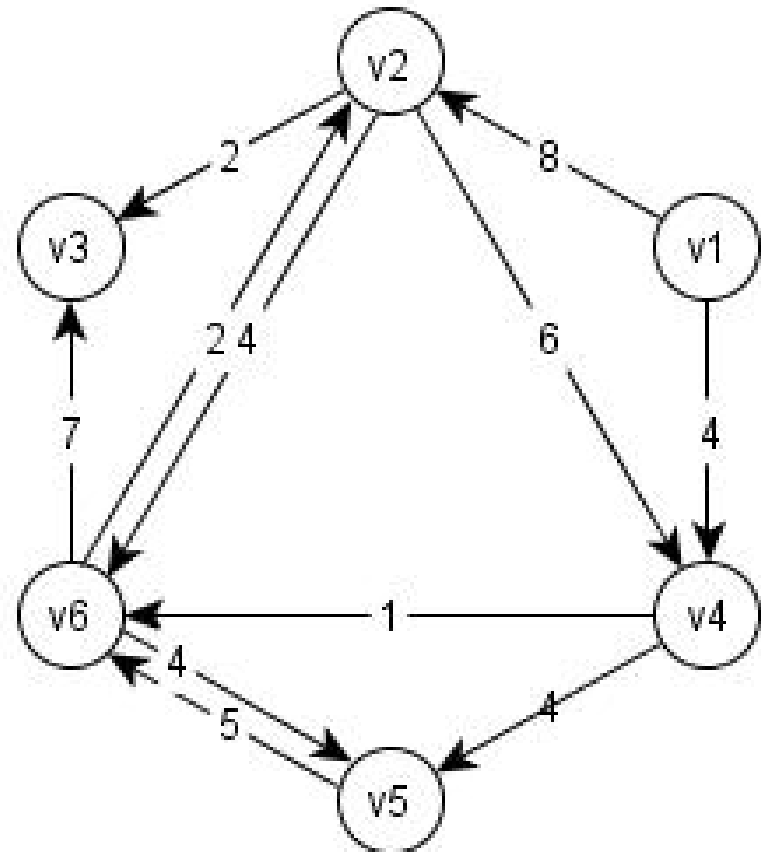
$$\min Z = w_{ij}x_{ij} \quad \forall (i, j) \in E$$

$$\sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{i:(i,s) \in E} x_{is} = 1$$

$$\sum_{j:(t,j) \in E} x_{tj} - \sum_{i:(i,t) \in E} x_{it} = -1$$

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} = 0 \quad i \neq s, j \neq t$$

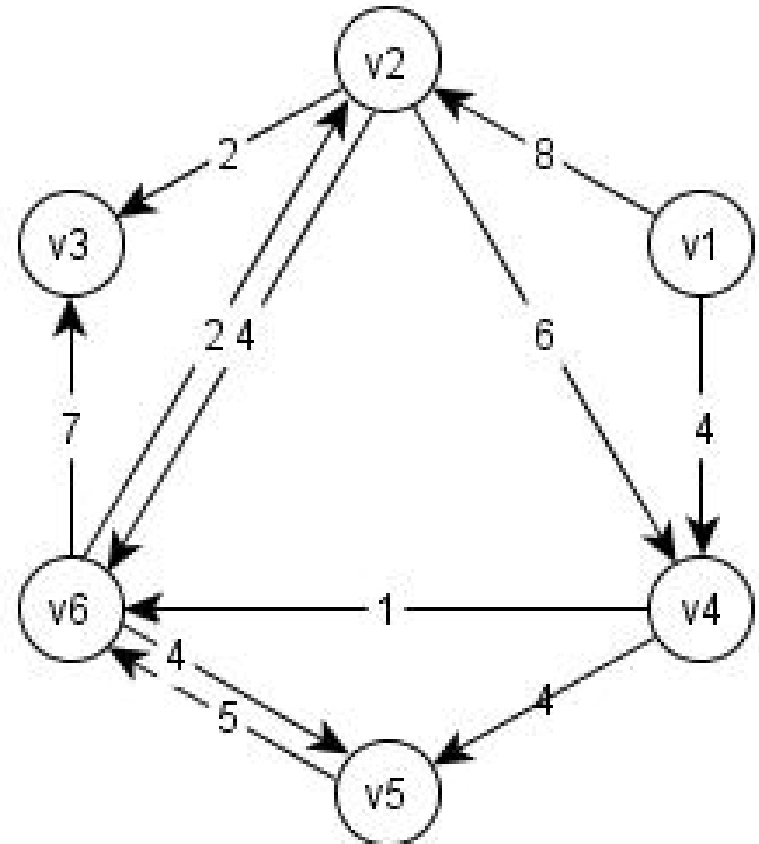
$$x_{ij} \geq 0$$



המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים

פתרון בעזרת Solver של Excel

	A	B	C	D
1				
2		i	j	w(i,j)
3		1	2	8
4		1	4	4
5		2	3	2
6		2	6	4
7		2	4	6
8		4	6	1
9		4	5	4
10		5	6	5
11		6	5	4
12		6	2	2
13		6	3	7
14				

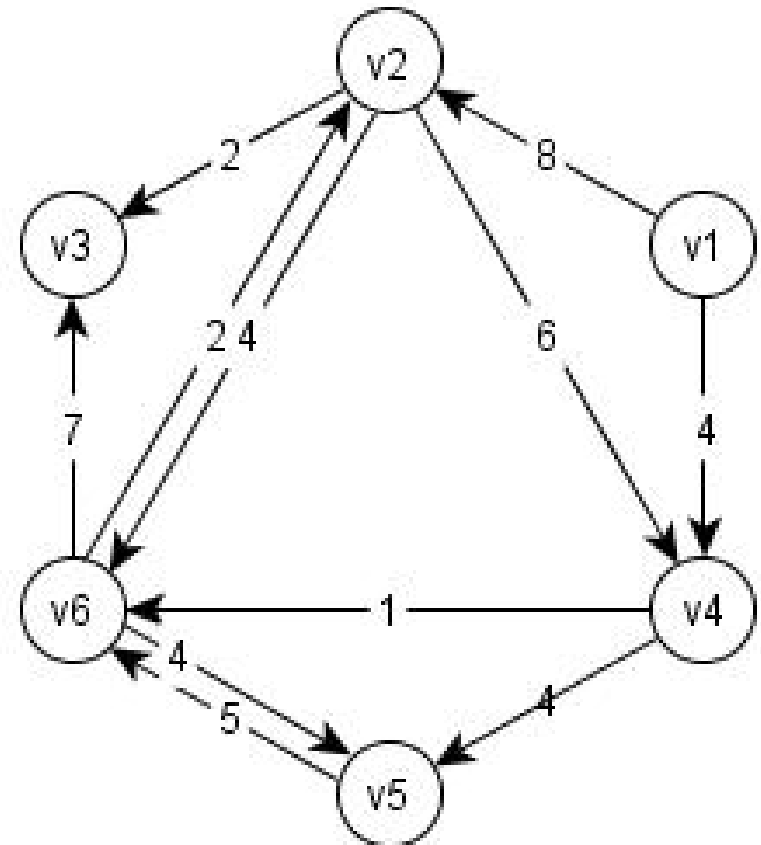


המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים

פתרון בעזרת Solver של Excel

G	H	I
Constraints		
0	=	1
0	=	0
0	=	0
0	=	0
0	=	0
0	=	-1

Z=		0
----	--	---



המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים

פתרון בעזרת Solver של Excel

Solver Parameters

Set Target Cell:

Equal To: Max Min Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

-
-
-

Solver Options

Max Time: seconds

Iterations:

Precision:

Tolerance: %

Convergence:

Assume Linear Model Use Automatic Scaling

Assume Non-Negative Show Iteration Results

Estimates: Tangent Quadratic

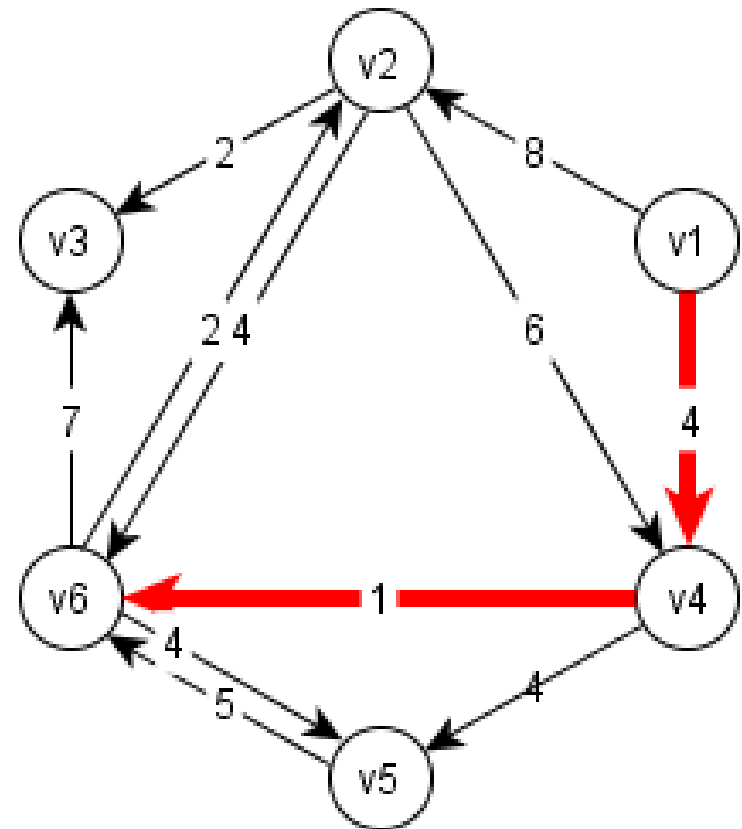
Derivatives: Forward Central

Search: Newton Conjugate

המסלול הקצר ביותר בין זוג קודקודים

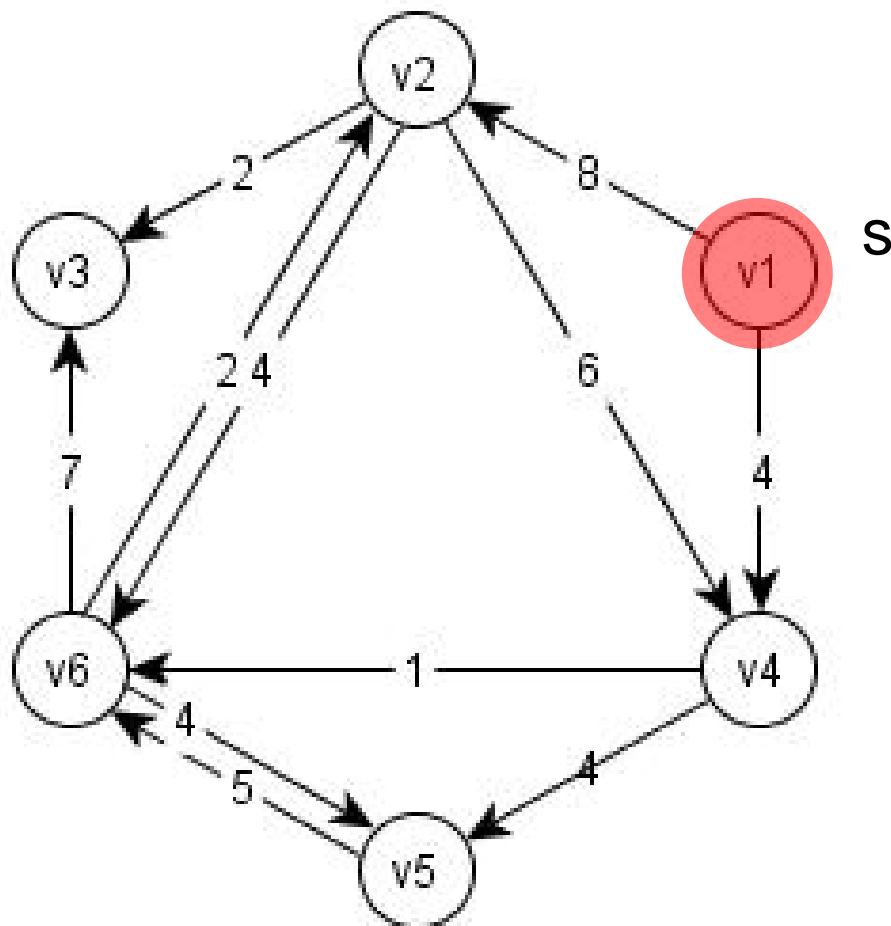
פתרון בעזרת Solver של Excel

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$3	$x(i,j)$	0	4.55125E-12
\$E\$4	$x(i,j)$	0	1
\$E\$5	$x(i,j)$	0	0
\$E\$6	$x(i,j)$	0	4.55125E-12
\$E\$7	$x(i,j)$	0	0
\$E\$8	$x(i,j)$	0	1
\$E\$9	$x(i,j)$	0	0
\$E\$10	$x(i,j)$	0	0
\$E\$11	$x(i,j)$	0	0
\$E\$12	$x(i,j)$	0	0
\$E\$13	$x(i,j)$	0	0



המסלולים הקצרים מקודקוד לשאר הקודקודים

□ עבור רשת בעלת משקלים, $G=(V,E,w)$, מהם המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד נתון, s , לכל שאר הקודקודים בגרף.



פתרון בעזרת תיכנות לינארי

□ עבור רשת בעלת משקלים, מהם המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד נתון, s , לכל שאר הקודקודים בגרף.

$$\text{Minimize: } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Subject to: } \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = (n - 1), \quad i = s$$

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = -1 \quad i = N - \{s\}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A$$

המסלולים הקצרים מקודקוד לשאר הקודקודים

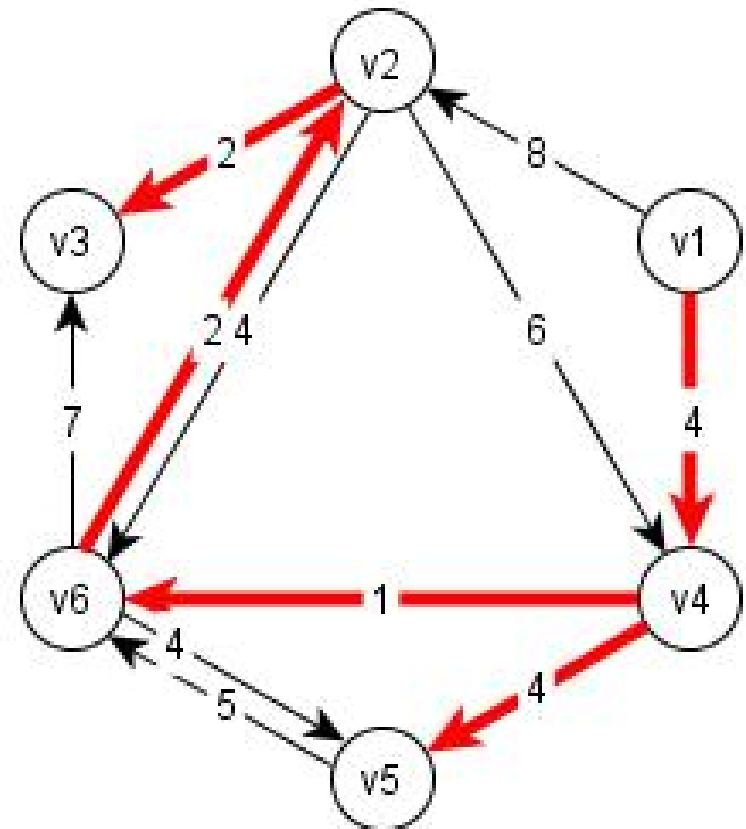
□ עבור רשת בעלת משקלים, מהם המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד נתון, s , לכל שאר הקודקודים בגרף.

Target Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$L\$3	Z=	0	33

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$3	$x(i,j)$	0	0
\$E\$4	$x(i,j)$	0	5
\$E\$5	$x(i,j)$	0	1
\$E\$6	$x(i,j)$	0	0
\$E\$7	$x(i,j)$	0	0
\$E\$8	$x(i,j)$	0	3
\$E\$9	$x(i,j)$	0	1
\$E\$10	$x(i,j)$	0	0
\$E\$11	$x(i,j)$	0	0
\$E\$12	$x(i,j)$	0	2
\$E\$13	$x(i,j)$	0	0



האלגוריתם של דיקסטר

- הוצג ע"י מדען המחשב ההולנדי אדסחר דיקסטר ב-1959
- פותר את בעיית המסלול הקצר ביותר מקודקוד לשאר הקודקודים
- האלגוריתם פועל כאשר בגרף לא קיימות קשתות בעלות משקל שלילי
- אלגוריתם של דיקסטר הינו אלגוריתם חמדני

האלגוריתם של דיקסטר

□ שלב האיתחול:

□ עבור כל קודקוד נסמן את המרחק אליו כ-" ∞ "

□ את המרחק של קודקוד המקור נסמן כ-" 0 "

□ השלב האיטרטיבי: כל עוד קיימים קודקודים שלא ביקרנו בהם נבצע

□ מבין הקודקודים שלא ביקרנו בהם, נבחר את הקודקוד שהמרחק אליו הוא הקצר ביותר

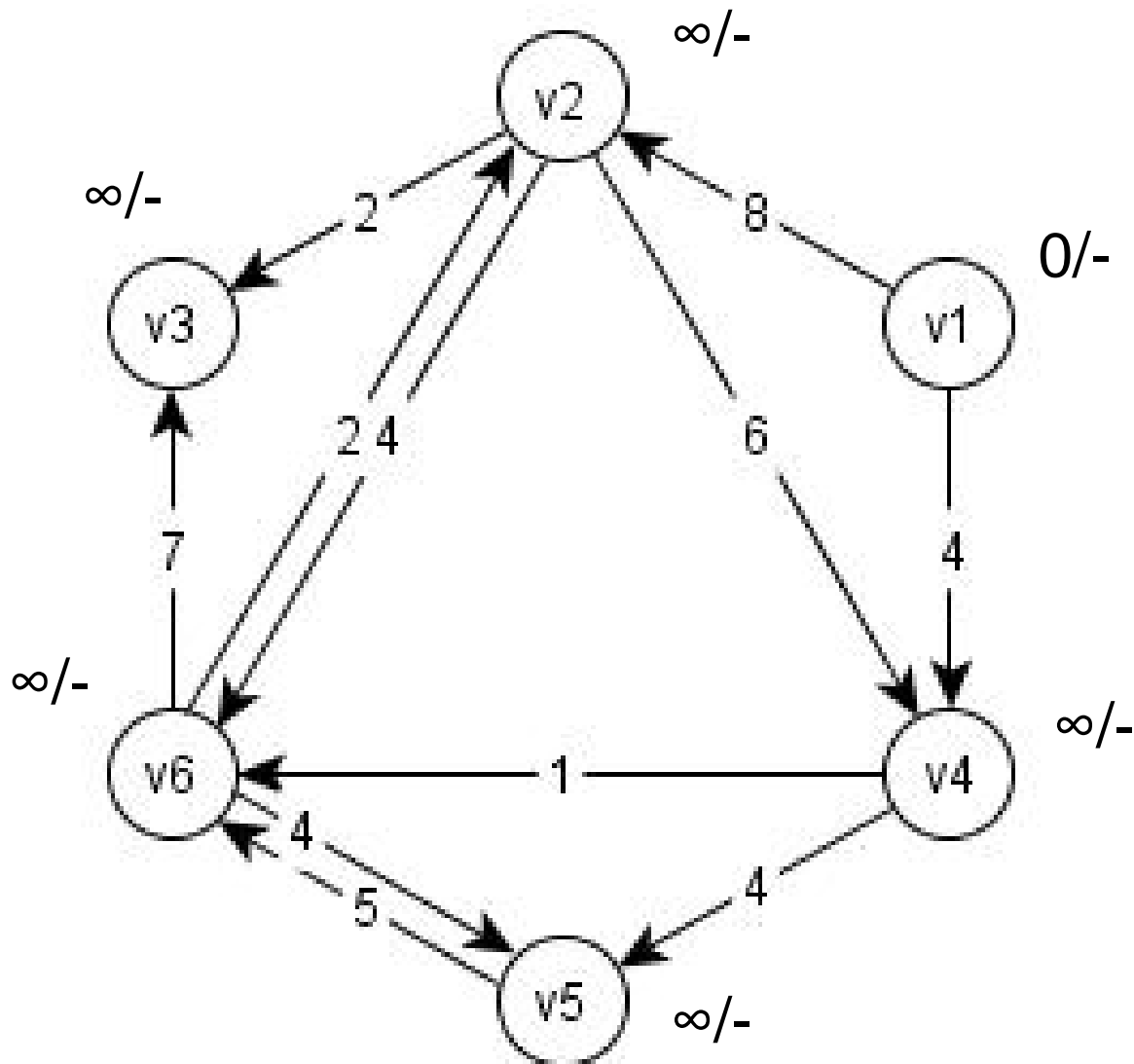
□ נבחן את כל הקודקודים השכנים שלו

□ אם זה קודקוד שכן שלא הגענו אליו קודם לכן, נציין מאיזה קודקוד הגענו, ומה המרחק שלקח להגיע אליו

□ אם כבר הגענו לקודקוד השכן הזה, אך המרחק החדש קטן יותר, נתקן את נתוני הקודקוד בהתאם

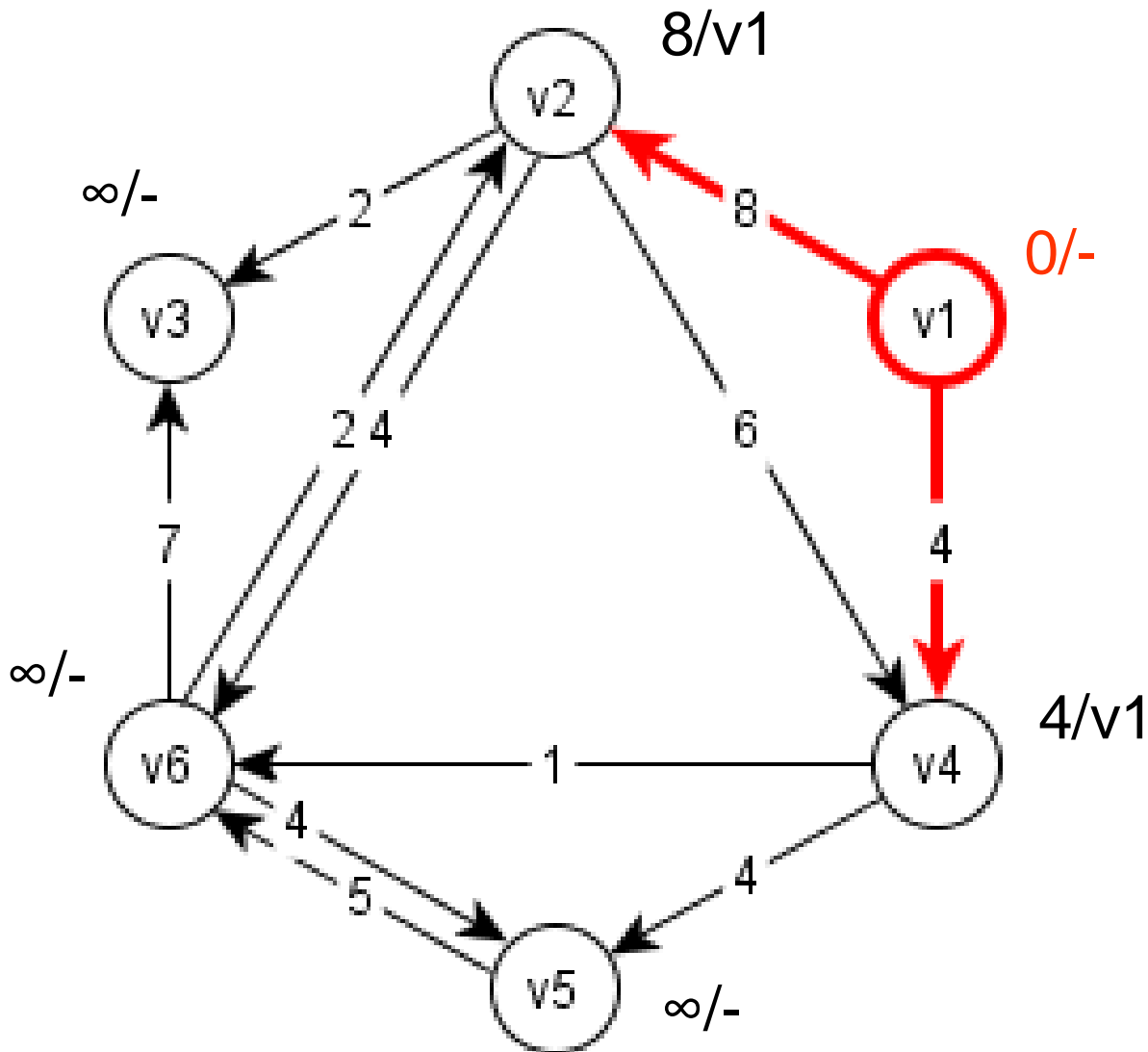
האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

v1 0

v2 ∞ v3 ∞ v4 ∞ v5 ∞ v6 ∞ 

האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

- v1 0
- v2 8
- v3 ∞
- v4 4
- v5 ∞
- v6 ∞



האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

v1 0

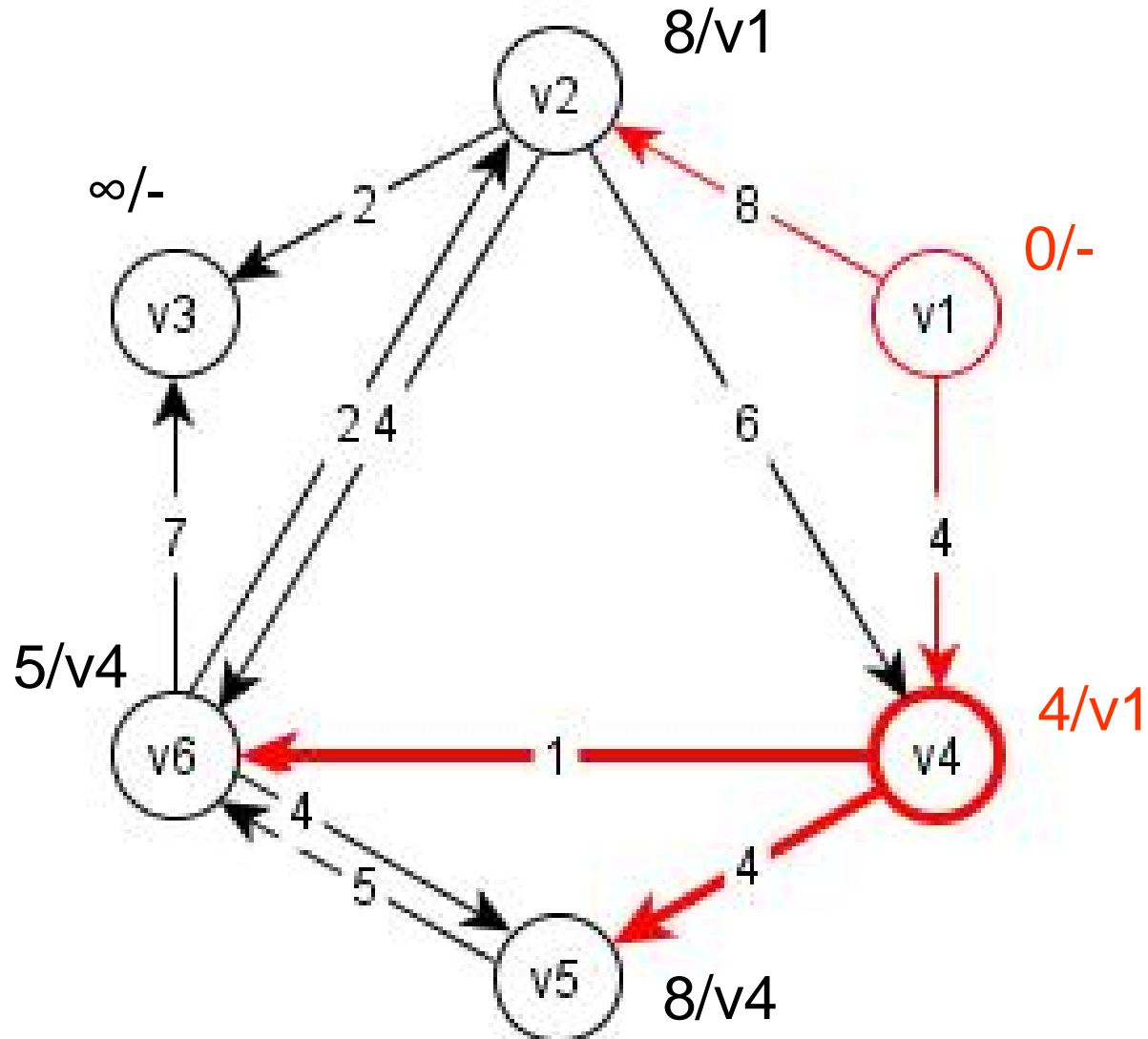
v2 8

v3 ∞

v4 4

v5 8

v6 5



האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

v1 0

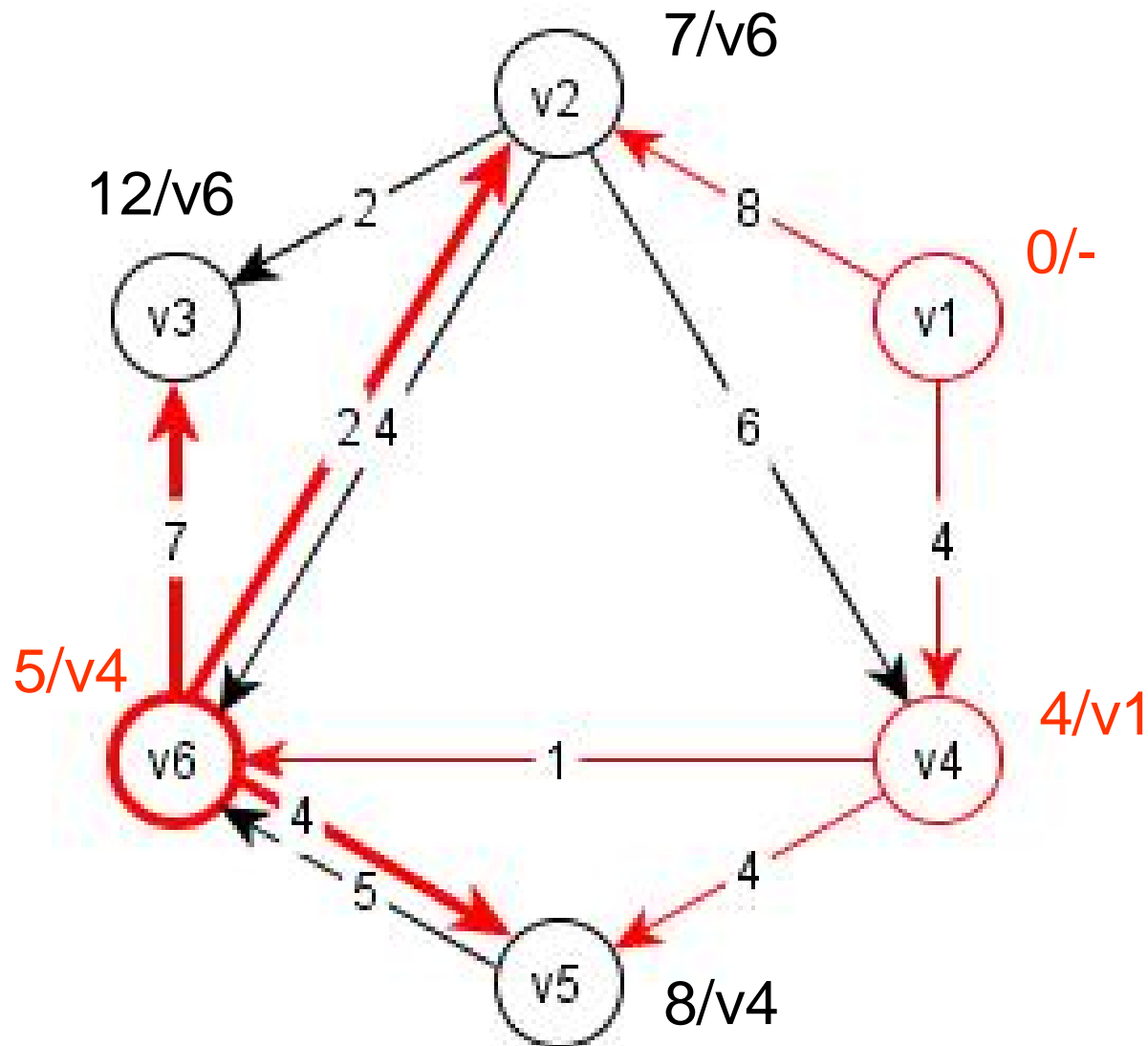
v2 7

v3 12

v4 4

v5 8

v6 5



האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

v1 0

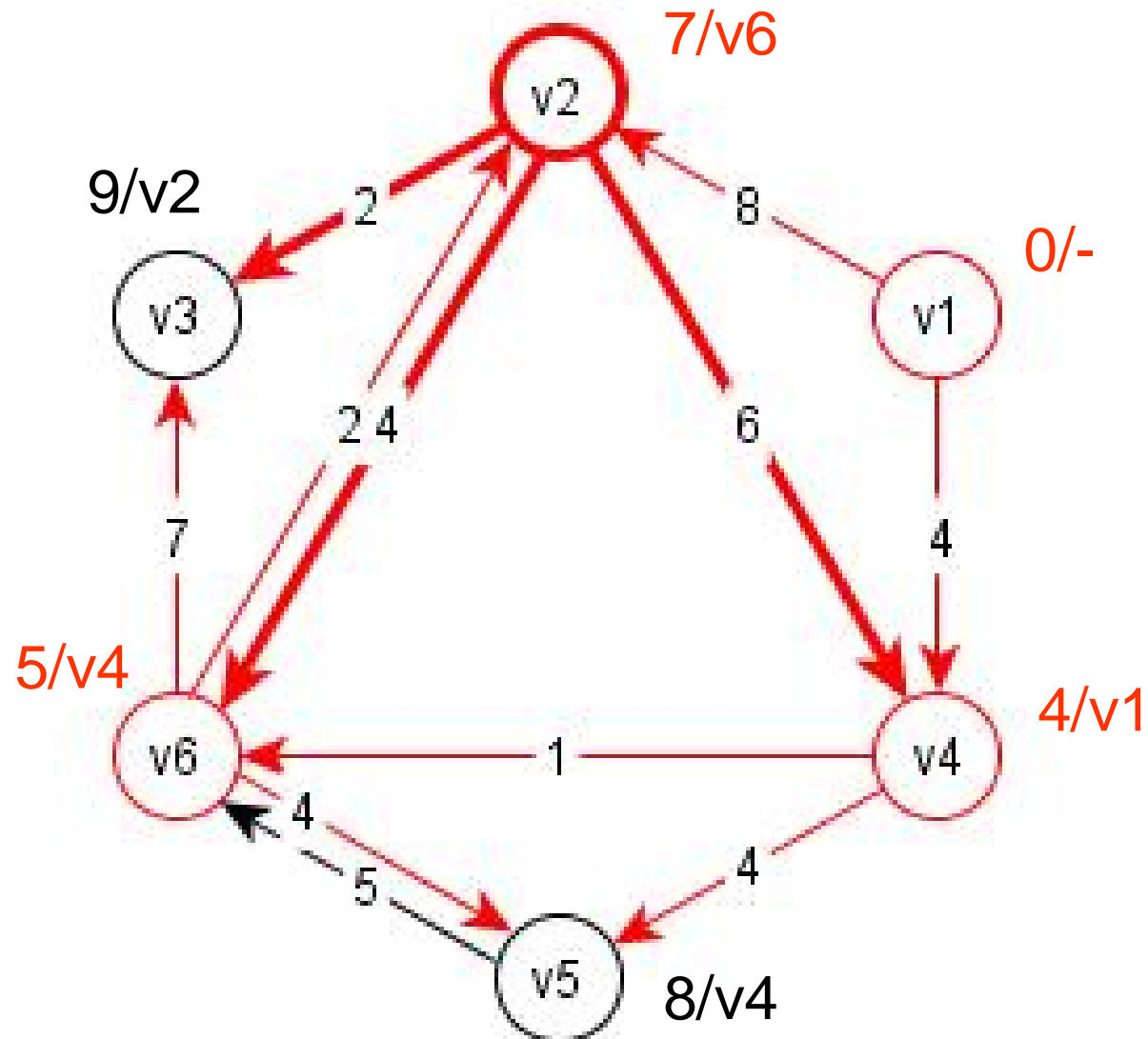
v2 7

v3 9

v4 4

v5 8

v6 5



האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

v1 0

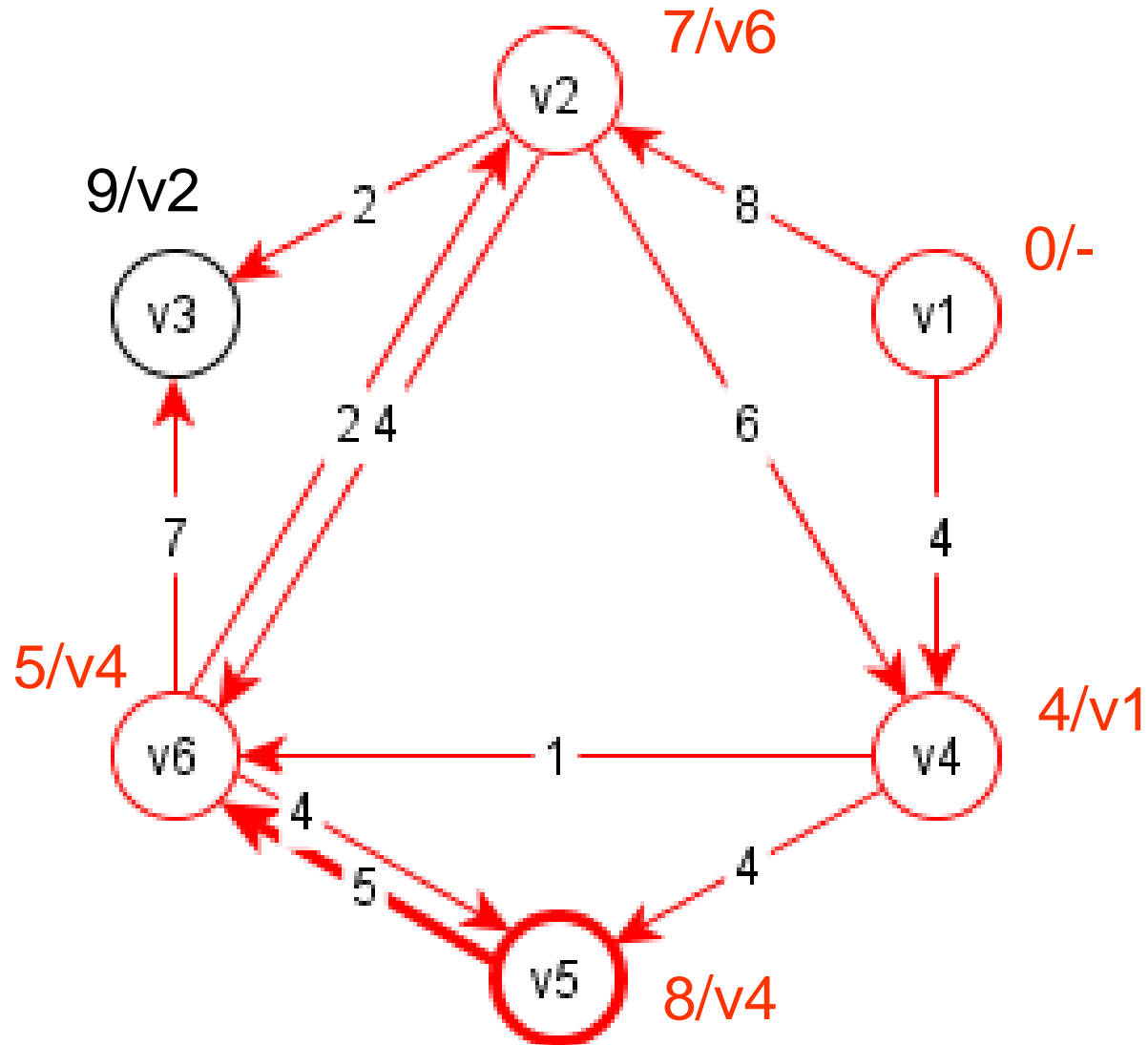
v2 7

v3 9

v4 4

v5 8

v6 5



האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

v1 0

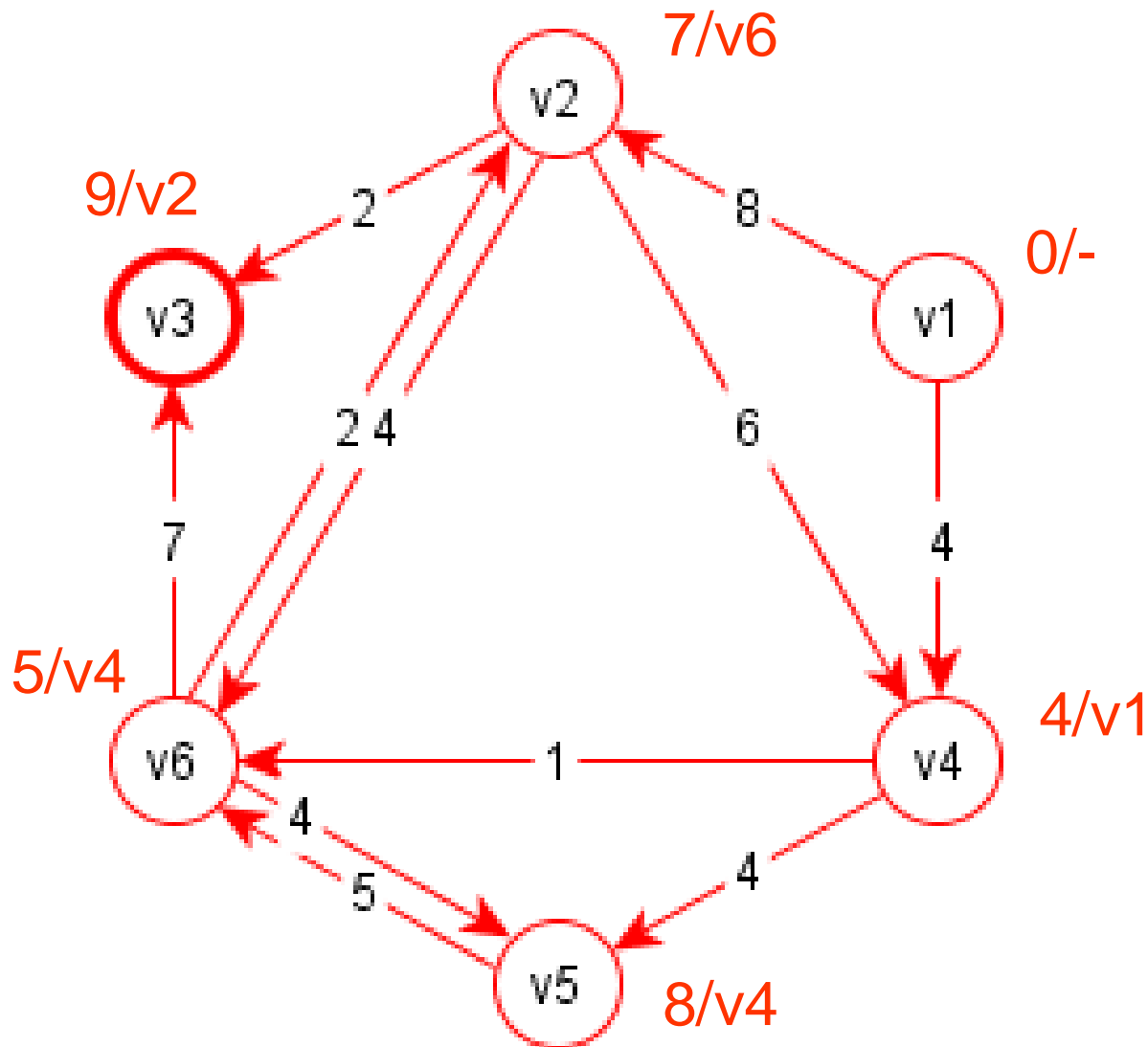
v2 7

v3 9

v4 4

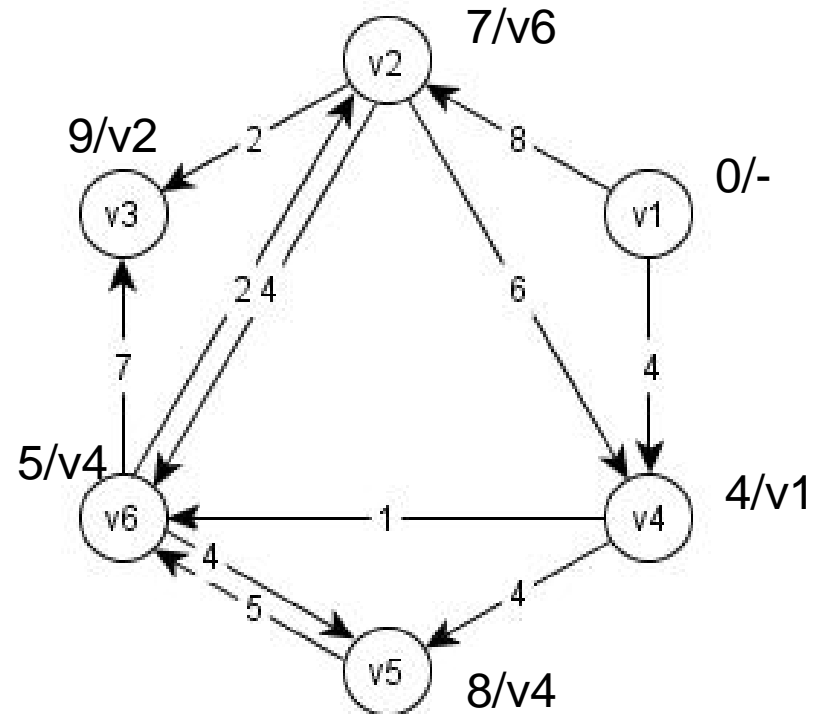
v5 8

v6 5



האלגוריתם של דיקסטר - דוגמא

V1	0	V1
V2	7	V1-V4-V6-V2
V3	9	V1-V4-V6-V2-V3
V4	4	V1-V4
V5	8	V1-V4-V5
V6	5	V1-V4-V6



נכונות האלגוריתם של דיקסטר

Dijkstra(G,s)

for all u in $V-s$ set $d(u)=\infty$

$d(s)=0$

$R=\{\}$

While $R \neq V$

pick u from S , u is not in R with smallest $d(u)$

$R=R+u$

for all vertices v adjacent to u

if $d(v) > d(u) + \text{Length}(u,v)$

$d(v) = d(u) + \text{Length}(u,v)$

נכונות האלגוריתם של דיקסטר

□ המטרה היא להראות שכל x ששייך ל- R , $d(x)=D(x)$, כאשר $D(x)$ הוא המרחק הקצר ביותר מ- s ל- x

□ נוכיח באמצעות אינדוקצייה

□ מקרה ראשוני - R מכיל רק איבר 1. מכון ש- R רק גדל, הפעם היחידה שבה R מכיל רק איבר אחד היא כאשר $R=\{s\}$, מכון ש- $d(s)=0$ וגם $D(s)=0$ הרי שבמקרה זה הטענה נכונה

□ הנחת האינדוקצייה – כאשר R מכיל k קודקודים (או פחות), אז לכל קודקוד x ששייך ל- R מתקיים $d(x)=D(x)$

□ יש להראות שעבור $R'=R+u$, כש- u הוא קודקוד כלשהו ששייך לקבוצה $V-R$, הנחת האינדוקצייה גם כן מתקיימת

נכונות האלגוריתם של דיקסטר

- נסמן ב- P את המסלול מ- s ל- u בעל המרחק $d(u)$
 - המסלול P מורכב מהמסלול P' (שהינו המסלול מ- s ל- v) ומהקשת (v,u)
 - נניח שיש מסלול קצר יותר מ- s ל- u , שהמרחק שלו הוא $D(u)$, נסמן אותו ב- Q
 - נסמן ב- y את הקודקוד הראשון במסלול Q שאינו שייך לקבוצה R
 - במסלול הזה חייבת להיות קשת (x,y) , כשהקודקוד x שייך לקבוצה R
 - ניתן לחלק את המסלול Q לשלושה תתי-מסלולים באופן הבא: Q_1 (שהינו מסלול מ- s ל- x), הקשת (x,y) ו- Q_2 (שהינו מסלול מ- y ל- u)
 - על פי הנחת האינדוקציה $d(x)=D(x)$
 - בהתאם לאופן שבו האלגוריתם מעדכן את מרחקי הקודקודים
- $$d(y) \leq d(x) + \text{Length}(x,y)$$

נכונות האלגוריתם של דיקסטר

□ בשל האופי החמדני של האלגוריתם $d(u) \leq d(y)$ (מכוון שלקבוצה R אנו מוסיפים קודקודים לפי סדר המרחקים)

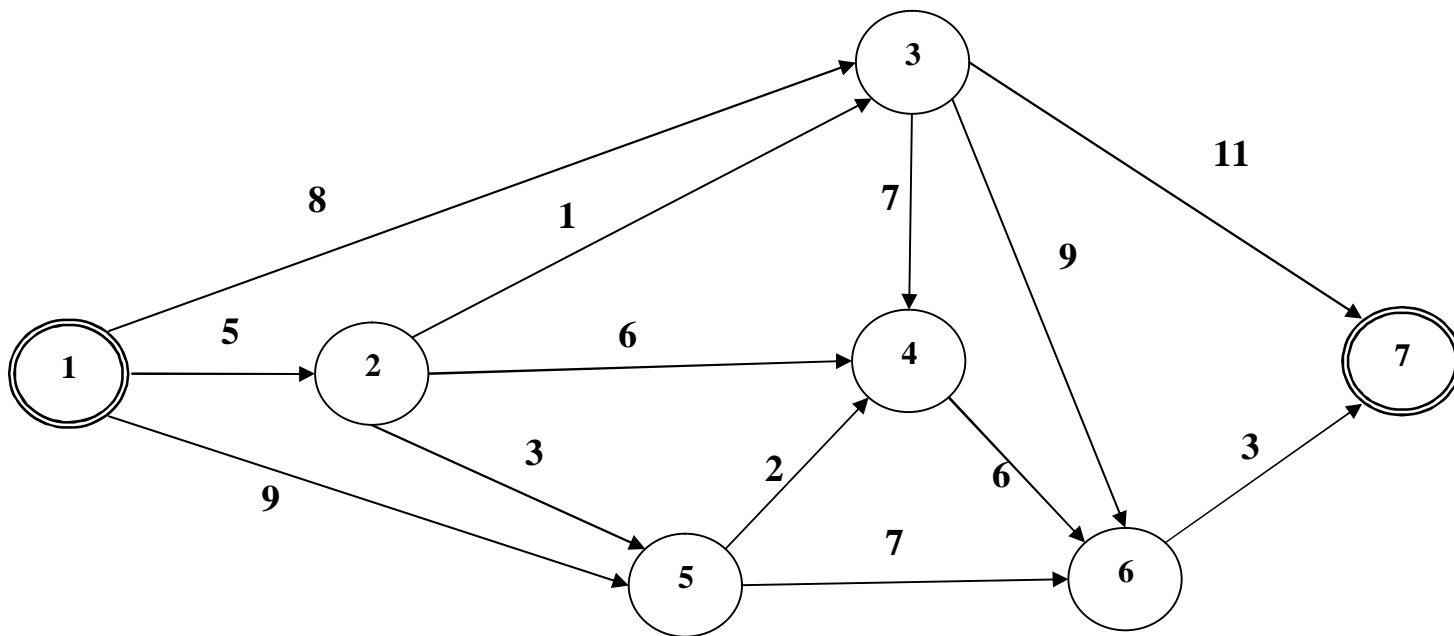
□ אבל, $d(u) \leq d(y) + d(Q_2)$, ומכאן נובע ש- $d(Q_2) = 0$

□ ולכן לא קיים מסלול Q שהוא קצר מ- P

סיבוכיות אלגוריתם של דיקסטר

- בתחילת האלגוריתם יש לנו גרף ריק
- בכל שלב אנו בוחנים קודקוד אחד, ואת הקשתות שלו
- בסוף האלגוריתם עברנו על כל הקודקודים של הגרף
- סיבוכיות האלגוריתם עבור הגרף, $G=(V,E)$, היא $O(|V|)$

האלגוריתם של דיקסטר – דוגמה נוספת



אלגוריתם פלויד-וורשאל

- האלגוריתם משמש למציאת המסלולים הקצרים ביותר בין כל שני זוגות קודקודים בגרף ממושקל ומכוון.
- האלגוריתם פועל גם כאשר בגרף קיימות קשתות בעלות משקל שלילי
- האלגוריתם אינו פועל אם בגרף יש מעגל שלילי.
- סיבוכיות האלגוריתם היא $O(|V|^3)$

אלגוריתם פלויד-וורשאל

□ לגרף נתון $G=(V,E)$ קיימת מטריצת מרחקים D . המרחק בין זוג קודקודים x ו- y מצויין כ- $d(x,y)$. אם לא קיימת קשת בין x ל- y , אז $d(x,y)=\infty$.

□ האלגוריתם מבוסס על ההנחה הבאה: עבור כל זוג קודקודים, x ו- y המרחק הקצר ביותר בניהם יכול להיות

$$d(x,y) \quad \square$$

□ או שהוא יכול לעבור דרך קודקוד נוסף, k , ואז המרחק הוא $d(x,k)+d(k,y)$.

אלגוריתם פלויד-וורשאל

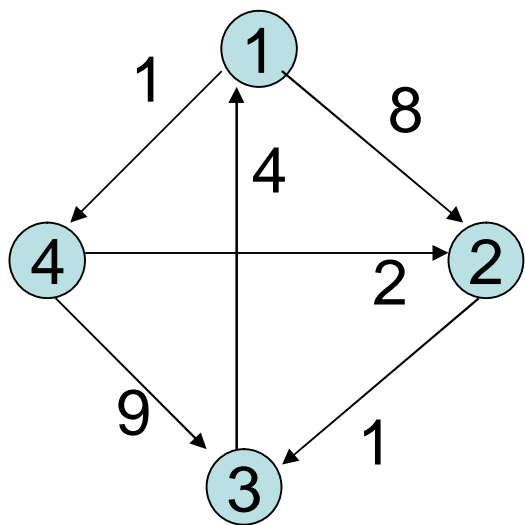
1. For $k=1$ to n

2. For $i=1$ to n

3. For $j=1$ to n

4. $d_k(i,j)=\min\{d_{k-1}(i,j),d_{k-1}(i,k)+d_{k-1}(k,j)\}$

אלגוריתם פלויד-וורשאל - דוגמא



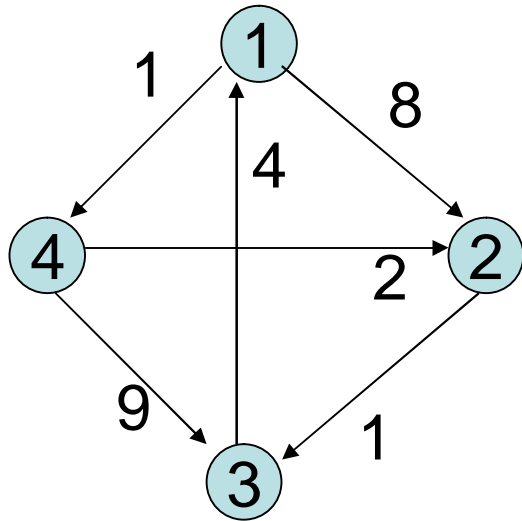
$$\min\{d_{k-1}(i,j), d_{k-1}(i,k)+d_{k-1}(k,j)\}$$

	1	2	3	4
1	1-1 0	1-2 8	-	1-4 1
2	-	2-2 0	2-3 1	-
3	3-1 4	-	3-3 0	-
4	-	4-2 2	4-3 9	4-4 0

	1	2	3	4
1	1-1 0	1-2 8	-	1-4 1
2	-	2-2 0	2-3 1	-
3	3-1 4	3-1-2 12	3-3 0	3-1-4 5
4	-	4-2 2	4-3 9	4-4 0

1,1+1,1	0+0=0
1,1+1,2	0+8=8
1,1+1,3	0+∞=∞
1,1+1,4	0+1=1
2,1+1,1	∞+0=∞
2,1+1,2	∞+8=∞
2,1+1,3	∞+∞=∞
2,1+1,4	∞+1=∞
3,1+1,1	4+0=4
3,1+1,2	4+8=12
3,1+1,3	4+∞=∞
3,1+1,4	4+1=5
4,1+1,1	∞+0=∞
4,1+1,2	∞+8=∞
4,1+1,3	∞+∞=∞
4,1+1,4	∞+1=∞

אלגוריתם פלויד-וורשאל - דוגמא



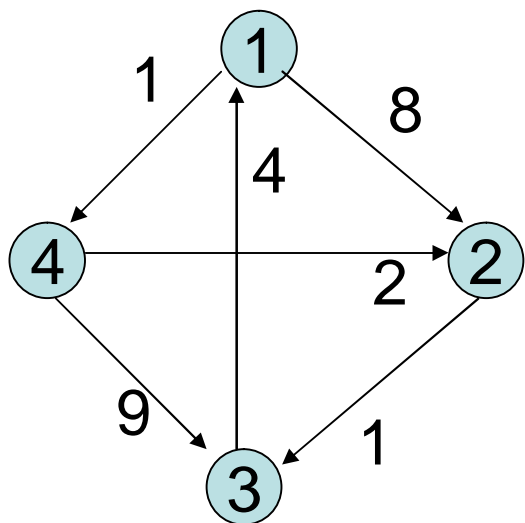
$$\min\{d_{k-1}(i,j), d_{k-1}(i,k)+d_{k-1}(k,j)\}$$

	1	2	3	4
1	1-1 0	1-2 8	1-3 -	1-4 1
2	2-1 -	2-2 0	2-3 1	2-4 -
3	4	12	0	5
4	-	2	9	0

	1	2	3	4
1	0	8	9	1
2	-	0	1	-
3	4	12	0	5
4	-	2	3	0

1,2+2,1	-
1,2+2,2	8+0=8
1,2+2,3	8+1=9
1,2+2,4	-
2,2+2,1	-
2,2+2,2	0+0=0
2,2+2,3	0+1=1
2,2+2,4	-
3,2+2,1	-
3,2+2,2	12+0=12
3,2+2,3	12+1=13
3,2+2,4	-
4,2+2,1	-
4,2+2,2	2+0=2
4,2+2,3	2+1=3
4,2+2,4	-

אלגוריתם פלויד-וורשאל - דוגמא



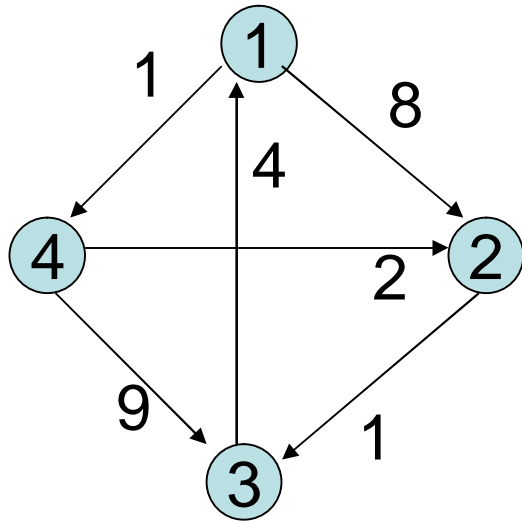
$$\min\{d_{k-1}(i,j), d_{k-1}(i,k)+d_{k-1}(k,j)\}$$

	1	2	3	4
1	0	8	9	1
2	-	0	1	-
3	4	12	0	5
4	-	2	3	0

	1	2	3	4
1	0	8	9	1
2	5	0	1	6
3	4	12	0	5
4	7	2	3	0

1,3+3,1	9+4=13
1,3+3,2	9+12=21
1,3+3,3	9+0=9
1,3+3,4	9+5=14
2,3+3,1	1+4=5
2,3+3,2	1+12=13
2,3+3,3	1+0=1
2,3+3,4	1+5=6
3,3+3,1	0+4=4
3,3+3,2	0+12=12
3,3+3,3	0+0=0
3,3+3,4	0+5=5
4,3+3,1	3+4=7
4,3+3,2	3+12=15
4,3+3,3	3+0=3
4,3+3,4	3+5=8

אלגוריתם פלויד-וורשאל - דוגמא



$$\min\{d_{k-1}(i,j), d_{k-1}(i,k)+d_{k-1}(k,j)\}$$

	1	2	3	4
1	0	8	9	1
2	5	0	1	6
3	4	12	0	5
4	7	2	3	0

	1	2	3	4
1	0	3	4	1
2	5	0	1	6
3	4	7	0	5
4	7	2	3	0

1,4+4,1	1+7=8
1,4+4,2	1+2=3
1,4+4,3	1+3=4
1,4+4,4	1+0=1
2,4+4,1	-
2,4+4,2	6+2=8
2,4+4,3	-
2,4+4,4	-
3,4+4,1	5+0=5
3,4+4,2	5+2=7
3,4+4,3	5+3=8
3,4+4,4	5+0=5
4,4+4,1	0+7=7
4,4+4,2	0+2=2
4,4+4,3	0+3=3
4,4+4,4	0+0=0

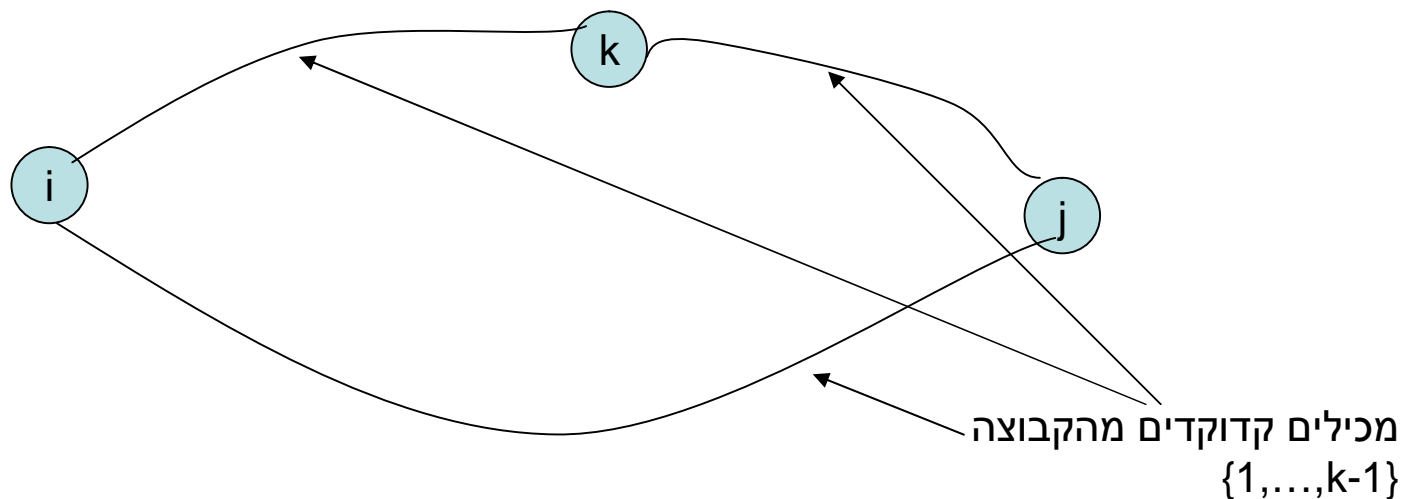
נכונות אלגוריתם פלוייד-וורשאל

- הוכחה באינדוקציה
- נניח שלפני איטרציה k מתקיים שעבור כל זוג קודקודים i ו- j , התא המתאים במצטריצה, Y_{ij} , מכיל את המרחק הקצר ביותר, Q , מ- i ל- j שמכיל צמתי מעבר אפשריים ששייכים לקבוצת הקודקודים $\{1, \dots, k-1\}$.
- הנחה זו מתקיימת עבור שלב האיתחול (שבו קבוצת צמתי המעבר האפשריים היא קבוצה ריקה).

נכונות אלגוריתם פלוייד-וורשאל

□ באיטרציה k , אנו משווים את האורך של Q לאורך של המסלול R , שמורכב משני תתי מסלולים R_1 ו- R_2 .

□ R_1 הוא מסלול מ- i ל- k עם צמתי מעבר אפשריים ששייכים לקבוצת הקודקודים $\{1, \dots, k-1\}$. R_2 הוא מסלול מ- k ל- j עם צמתי מעבר אפשריים ששייכים אף הם לקבוצת הקודקודים $\{1, \dots, k-1\}$.

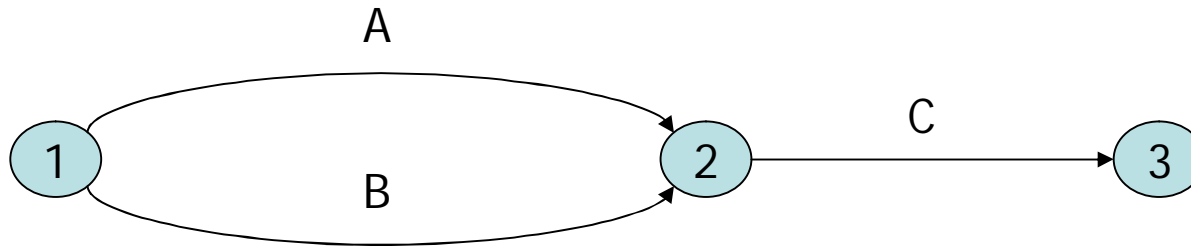


נכונות אלגוריתם פלוייד-וורשאל

- המסלול הקצר ביותר מ- i ל- j בגרף G יכול להכיל צמתי מעבר אפשריים ששייכים לקבוצת הקודקודים $\{1, \dots, k\}$. שני מקרים יכולים להתקיים:
- המסלול הקצר ביותר מ- i ל- j בגרף G אינו עובר דרך קודקוד k , ולכן זהו המסלול שקיבלנו באיטרצייה הקודמת.
- המסלול הקצר ביותר מ- i ל- j בגרף G עובר דרך קודקוד k , ולכן אפשר לחלק אותו לשני מסלולים, האחד מ- i ל- k והשני מ- k ל- j , שאת שניהם קיבלנו באיטרצייה הקודמת.
- ולכן, תהליך העידכון מבטיח את הנחת האינדוקצייה לאחר איטרצייה k .

מסלול קצר ביותר ברשת סטוכסטית

□ איך פותרים את הבעיה הבאה:



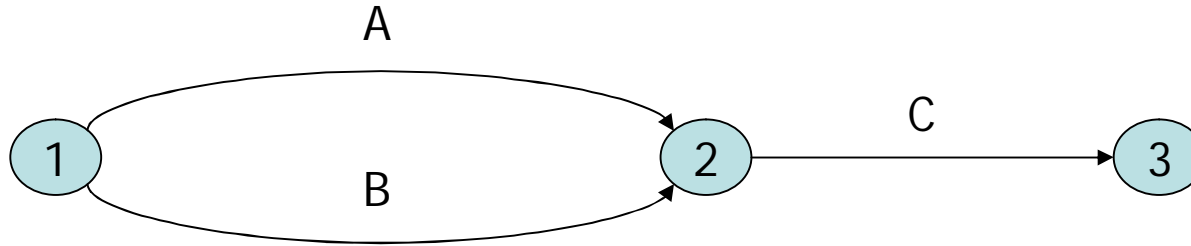
□ נוסע יוצא בשעה 14:00 מקודקוד 1, ומעוניין להגיע לקודקוד 3.

□ מהוא המסלול הקצר ביותר ?

מאפייני הרשת	
קשת	זמן נסיעה (דקות)
A	100
B	90 בהסתברות 0.5
	120 בהסתברות 0.5
C	30 אם מגיעים ל-2 לפני 15:35 100 אחרת

מסלול קצר ביותר ברשת סטוכסטית

□ נבחן את הפתרונות האפשריים:



□ המסלול C-A: $200 = 100 + 100$.

□ מסלול C-B אפשרות 1: $120 = 30 + 90$ בהסתברות 0.5.

□ מסלול C-B אפשרות 2: $220 = 100 + 120$ בהסתברות 0.5.

□ האם יש חשיבות קריטית לזמן ההגעה ?