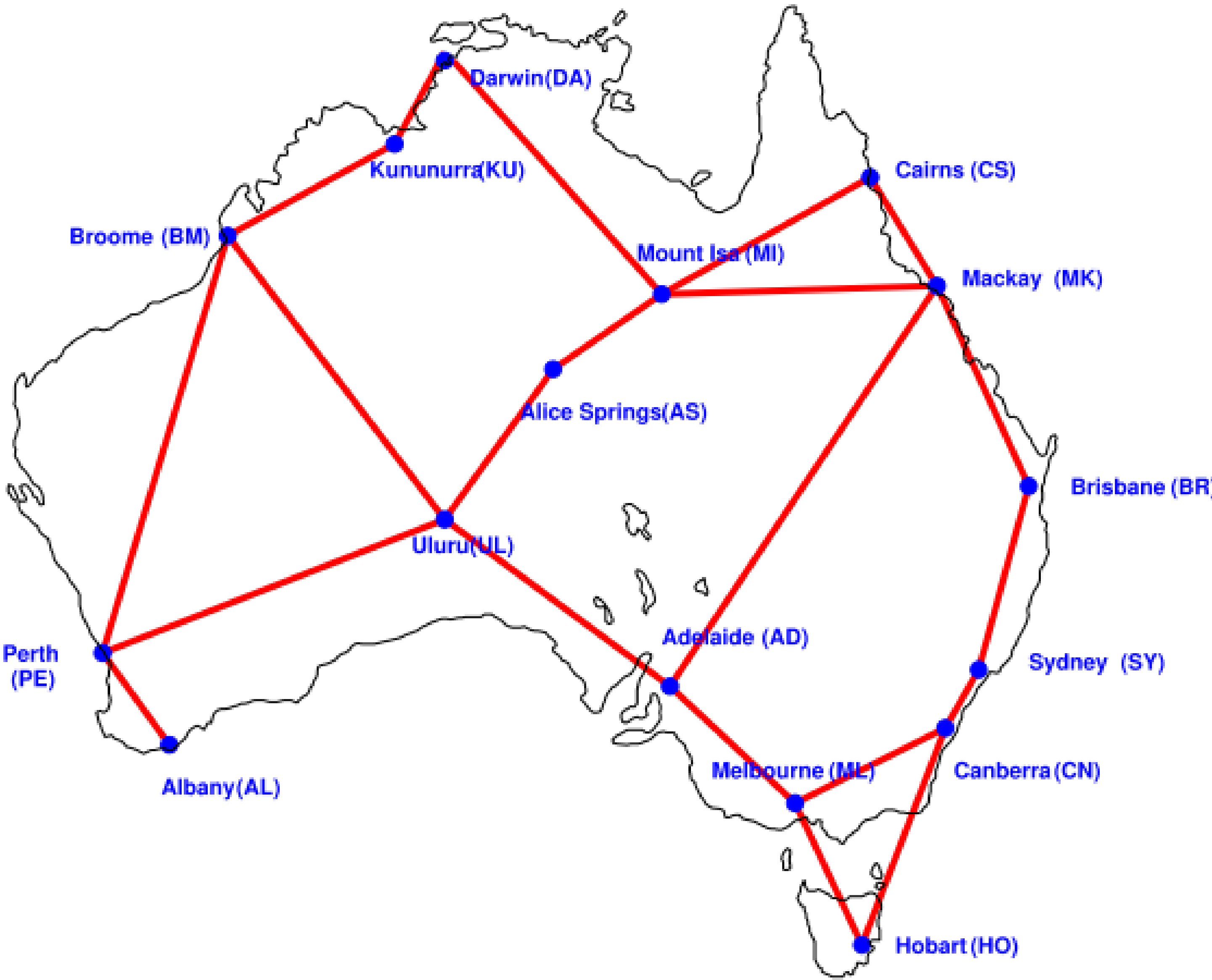
יסודות מערכות תובלה ושינוע

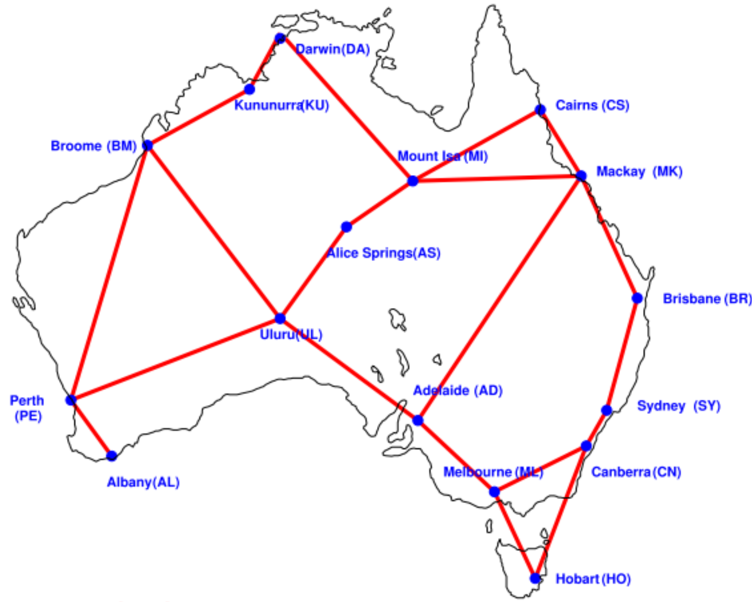
מצגת 5

מודלים וכלים – עצים פורשים

עצים פורשים

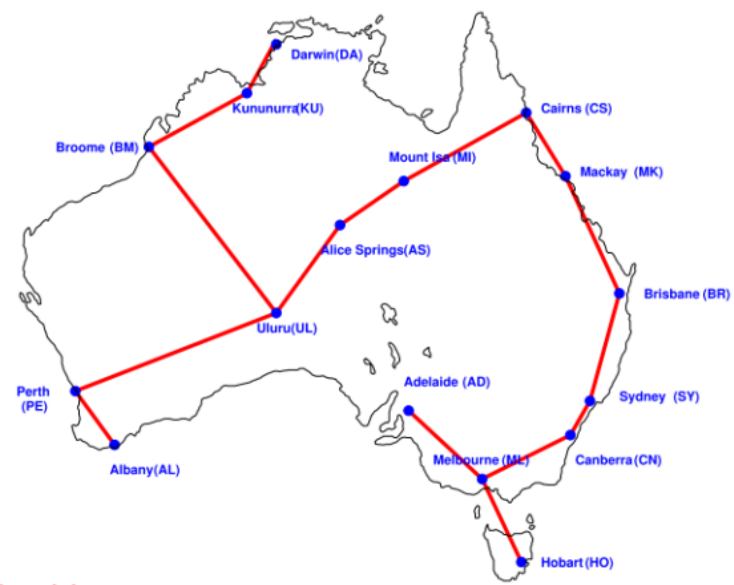

Darwin(DA)
Kununurra(KU)
Cairns (CS)
Broome (BM)
Mount Isa (MI)
Mackay (MK)
Alice Springs(AS)
Brisbane (BR)
Uluru(UL)
Adelaide (AD)
Perth
(PE)
Sydney (SY)
Canberra (CN)
Melbourne (ML)
Albany(AL)
Hobart (HO)

עצים פורשים



Too many edges!

Still too many edges



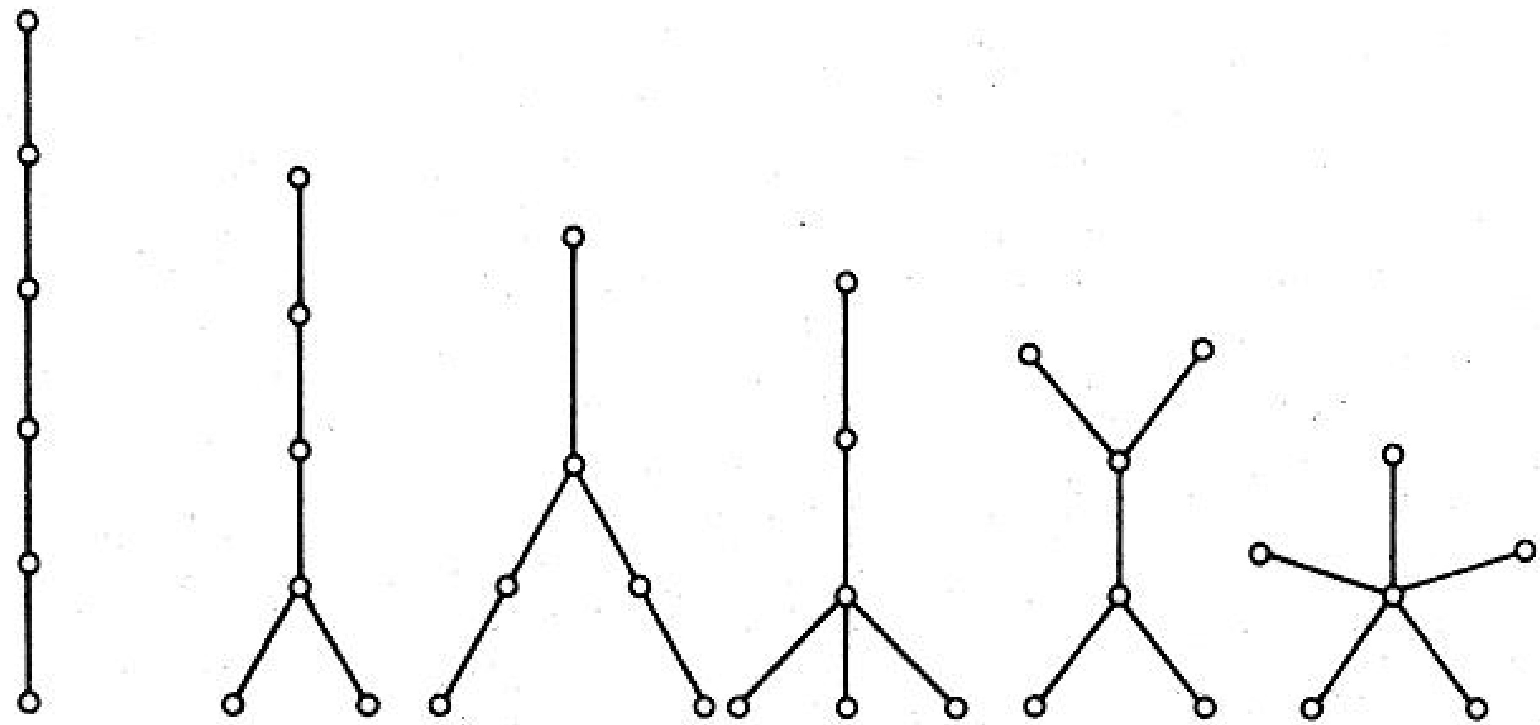
Just right

רקע

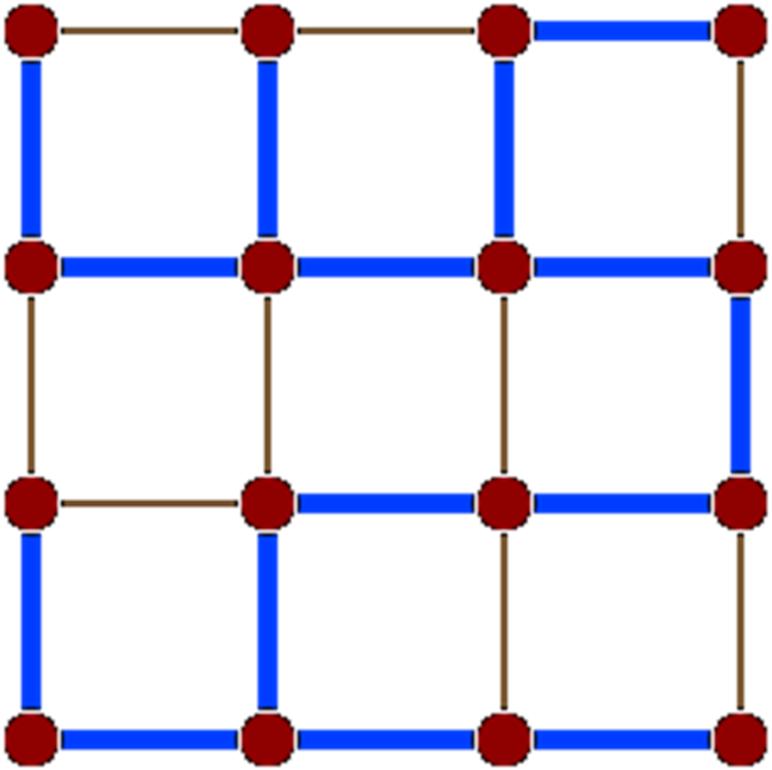
- לעיתים, בעת תכנון תחבורה, אנו נדרשים לתכנן רשת שבה כל הקדקודים מחוברים ביניהם (יש מסלול בין כל זוג קדקודים).
- במידה ומטרה שלנו היא מינימום עלויות הקמה, וכל קשת ברשת היא דו-כיוונית (הגרף לא מכוון), הבעיה שלנו היא למעשה למצוא עץ פורש מינימאלי של אותה הרשת.
- דוגמאות: הקמת רשת חשמל, הובלה בצינורות – כגון מים, ביוב וגז

עצים פורשים

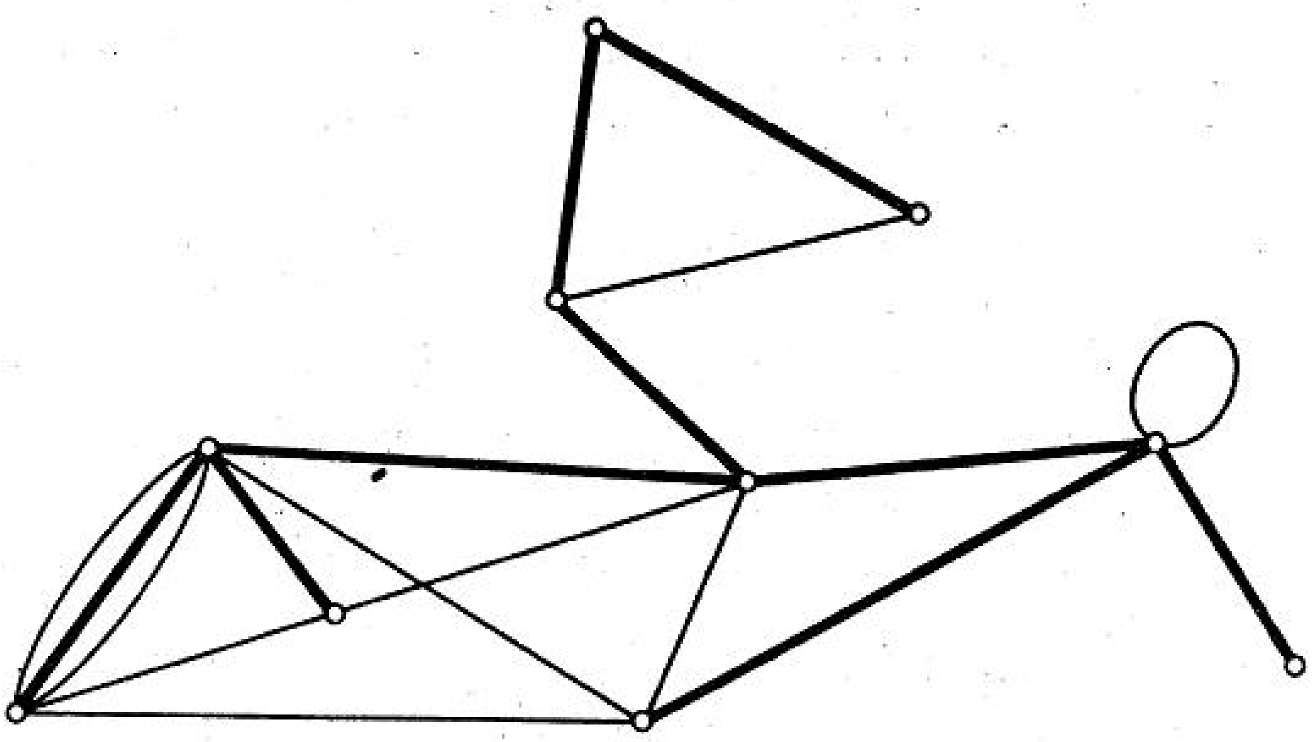
- גרף הוא אוסף של קודקודים ושל קשתות שמייצגות קשרים בין הקודקודים.
- בגרף יתכן וקיים יותר ממסלול אחד מקודקוד אחד לקודקוד שני, כאשר קיים מצב כזה, אנו אומרים שבגרף יש לולאות, או שזה גרף מעגלי.
- גרף קשיר הוא גרף שבו קיים מסלול בין כל קודקודי הגרף.
- עץ הוא גרף קשיר חסר לולאות.
- עץ פורש הוא תת-גרף קשיר של גרף נתון, שקבוצת הקודקודים שלו זהה לקבוצת הקודקודים של הגרף המקורי.



עצים פורשים



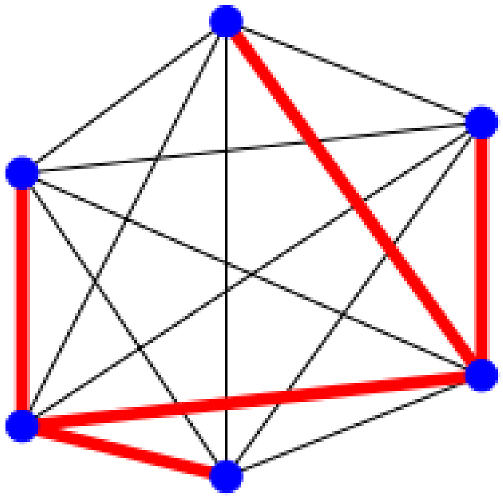
עצים פורשים



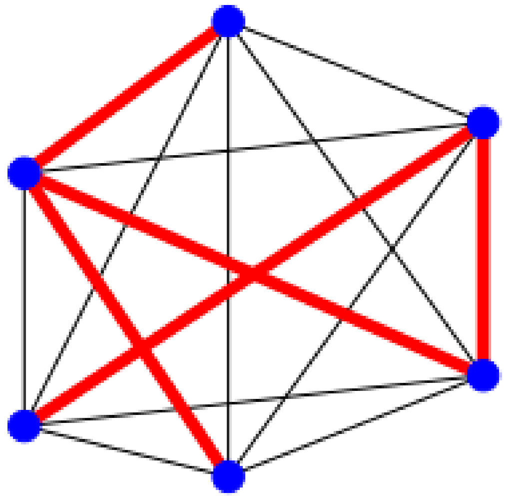
מספר הקשתות בעץ

- מהוא מספר הקשתות בעץ (לאו דווקא פורש) ? (או, כאשר אנו בונים עץ פורש, איך אנו יוכלים לבדוק שלא החסרנו או הוספנו קשתות ?)
- בעץ שבנוי מקודקוד אחד בלבד אין אף קשתות.
- נוסיף לעץ הקודם קודקוד. מכוון שזה עץ יש לחבר אותו לקודקוד הקיים, ולכן מספר הקשתות הוא 1.
- ניתן להוכיח (באינדוקציה) שלכל עץ בעל n קודקודים יש n-1 קשתות.

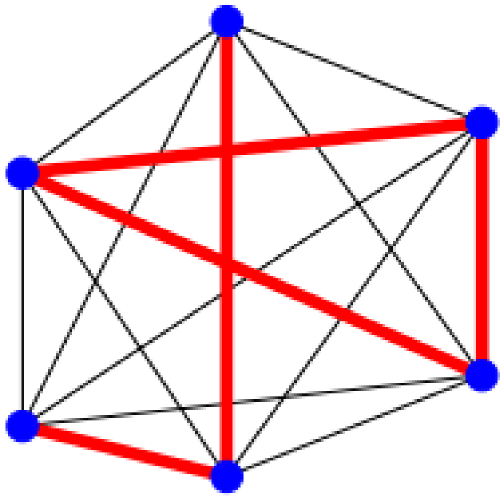
האם כל גרף בעל n-1 קשתות הוא עץ ?



Spanning tree



Spanning tree



Not a spanning tree

עץ פורש מינמאלי

הבעיה: בהיתן גרף ממושקל, $G=(V,E,w)$, אנו מעוניינים למצוא עץ פורש, שסך משקל הקשתות שלו הוא מינימאלי

שימושים: פריסת תשתית

אלגוריתם: אלגוריתם חמדן (Greedy)

עץ פורש מינימלי – תכנות לינארי

נסמן ב-S את קבוצת הקדקודים השייכים לעץ הפורש וב-A(S) את קבוצות הקשתות. מכאן שאם (u,v) שייך ל-A(S) הרי ש-u שייך ל-S ו-v שייך ל-S. ניתן להציג את בעיית מציאת עץ פורש מינימאלי כבעיית תכנון לינארי באופן הבא:

Minimize:

$$Z = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

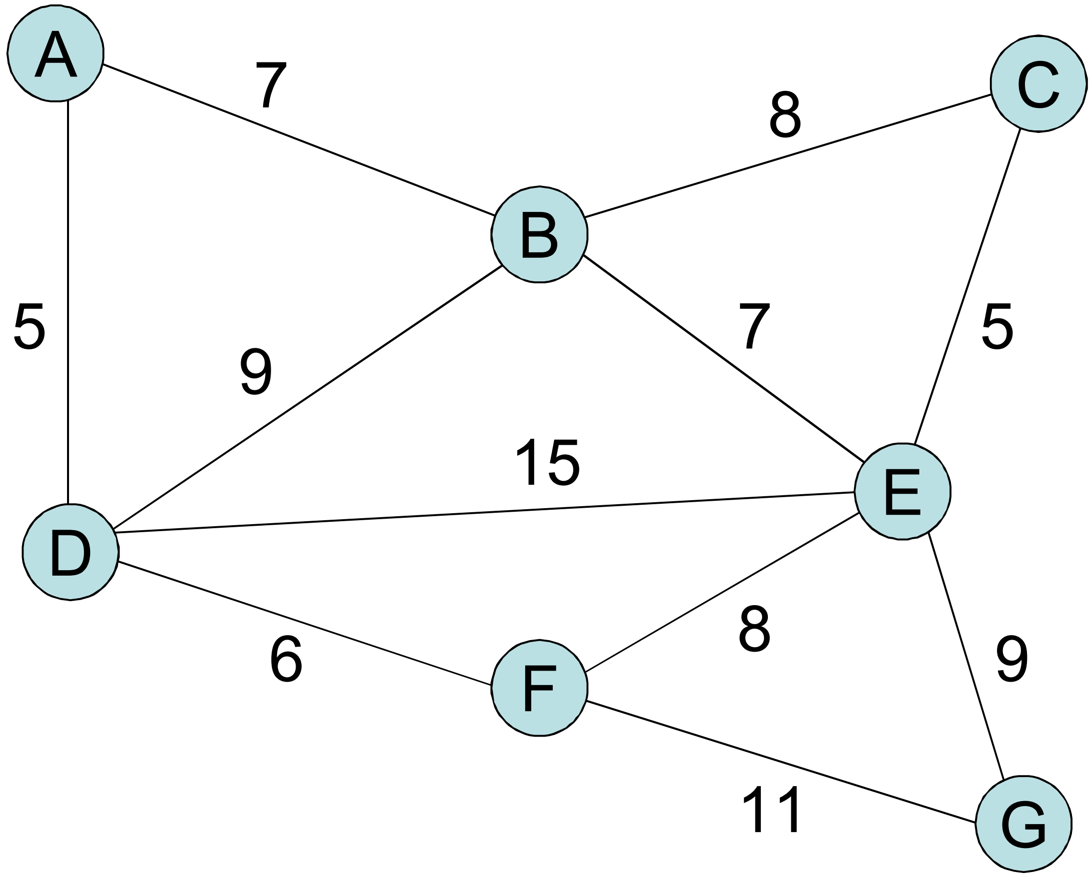
Subject to:

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = |N| - 1$$

$$\sum_{(i,j)\in A(S)} x_{ij} = |S| - 1 \quad S \subseteq N$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$

עץ פורש מינימלי – תכנות לינארי



אלגוריתם - הגדרה

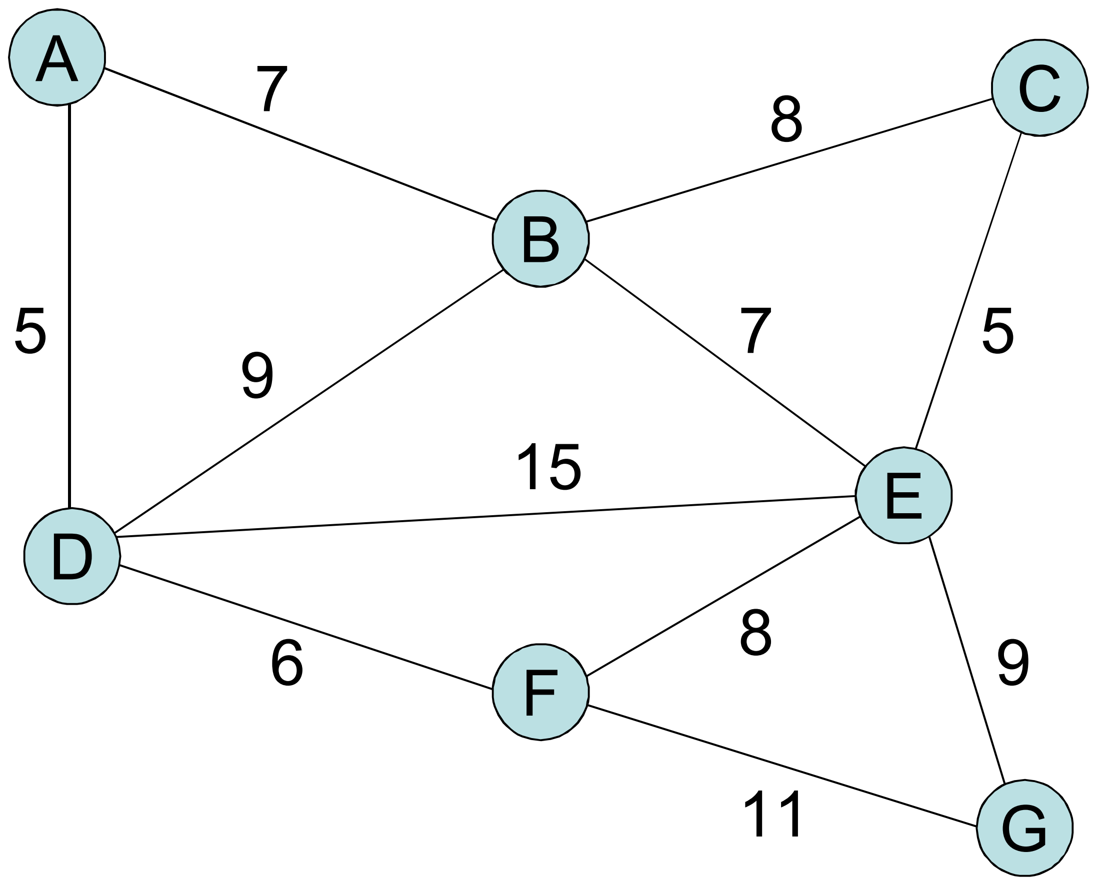
- אלגוריתם הינו דרך מוגדרת היטב, שצעדיה ברורים וחד משמעיים לפתרון בעייה נתונה.
- מספר הצעדים בכל אלגוריתם הוא סופי.

אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי (קרוסקל)

להלן השלבים לבניית עץ פורש מינימאלי

1. נמיין את קשתות הגרף בהתאם למשקלים, מהקטן לגדול, ונמספר אותן בהתאם
2. נגדיר i=1
3. נבדוק אם הוספת קשת i לעץ הפורש יוצרת מעגל, אם התשובה שלילית, נוסיף אותה לעץ הפורש
4. נגדיל את i ב-1 (i=i+1)
5. אם i גדול ממספר הקשתות בגרף, אז סיימנו, אחרת חזור לשלב 3

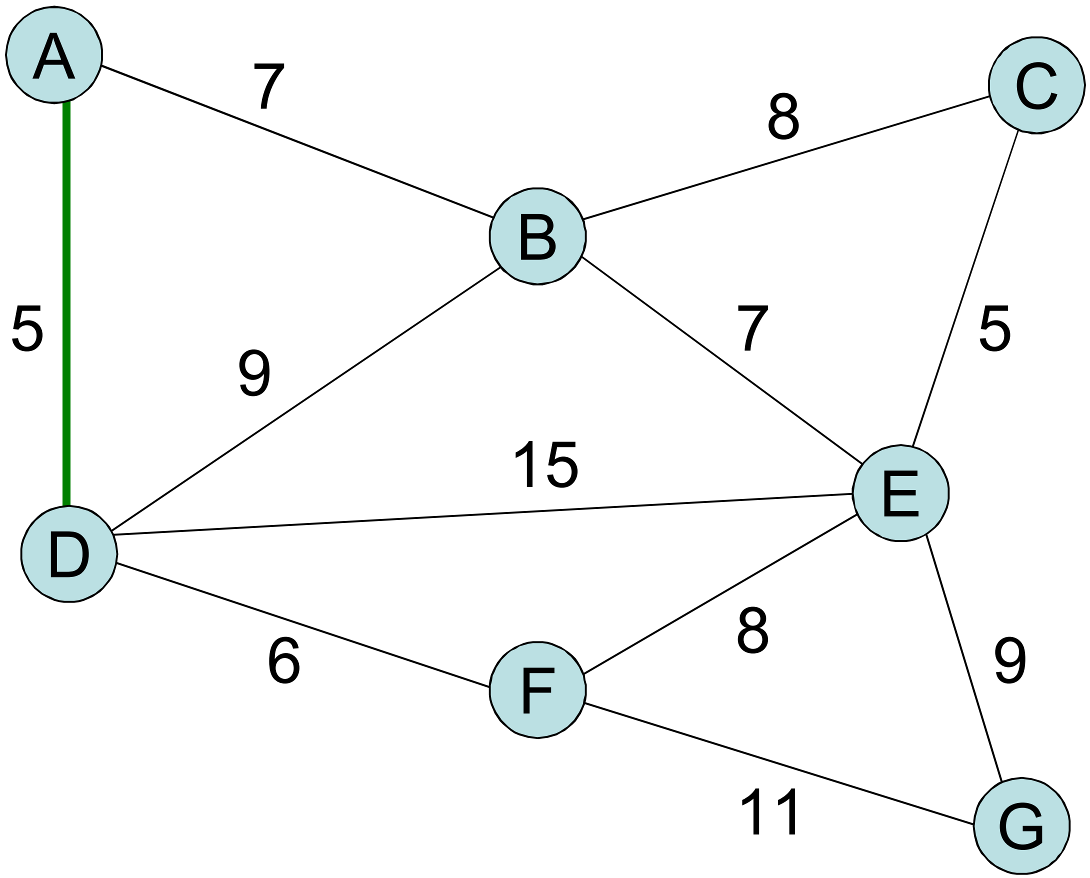
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא



AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15

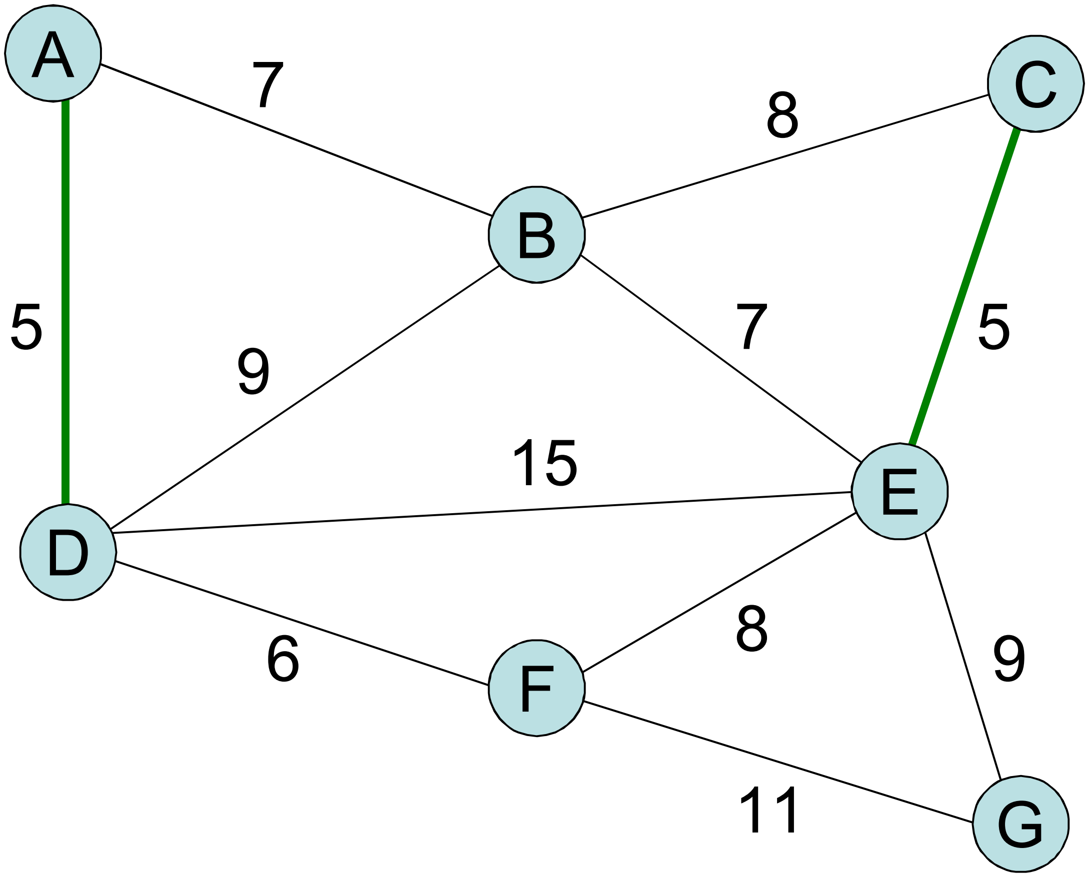
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינימלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15



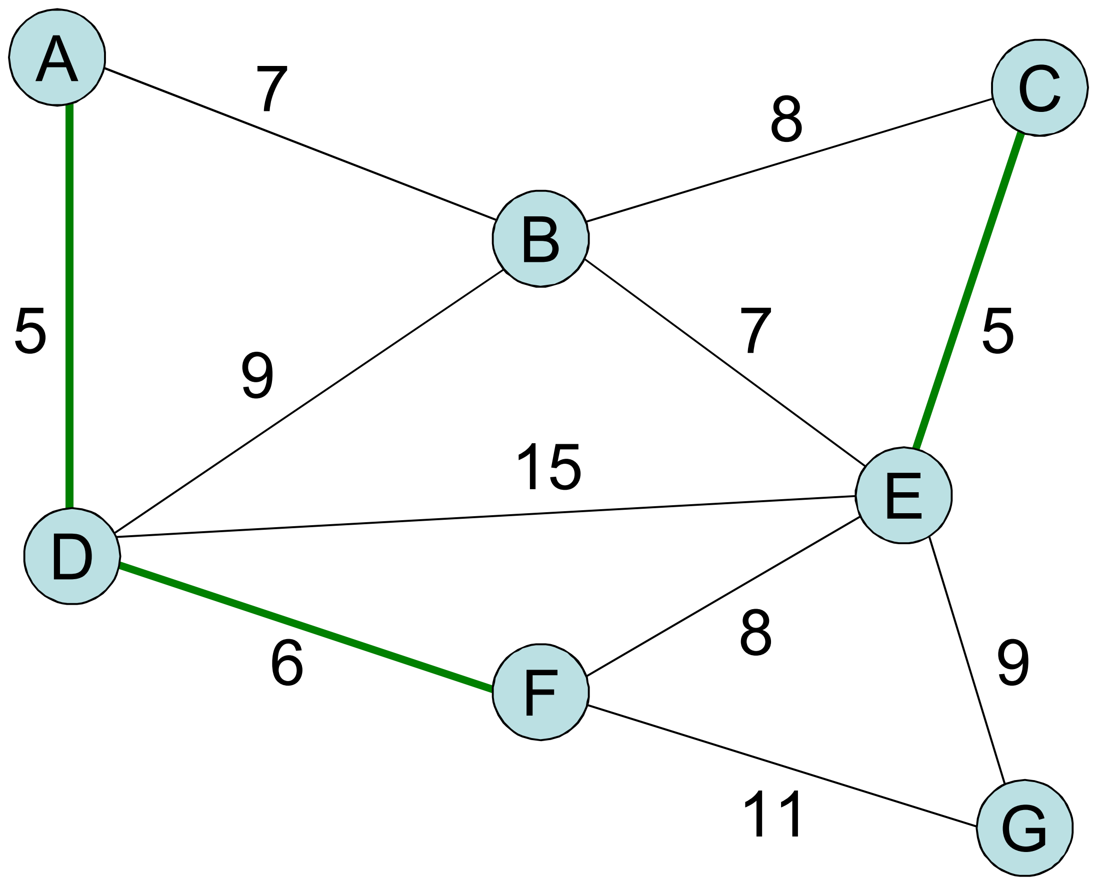
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינימלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15



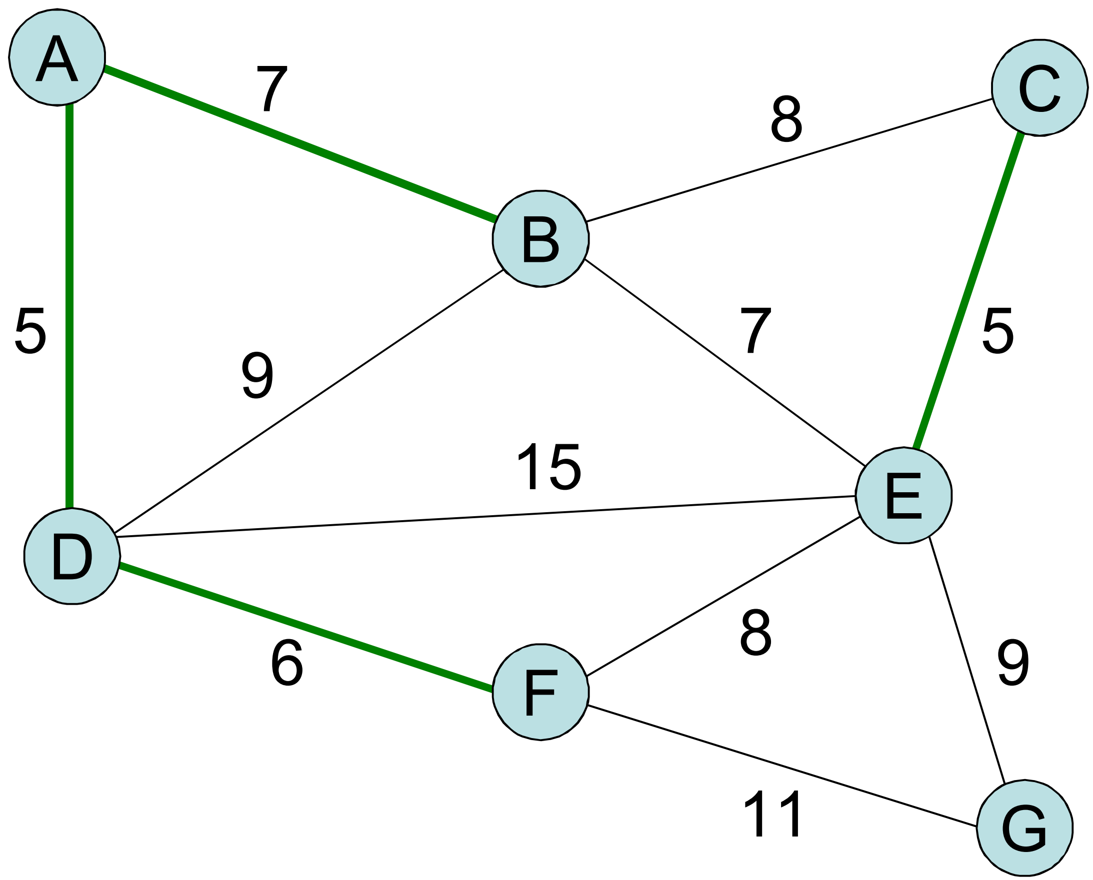
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינימלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15



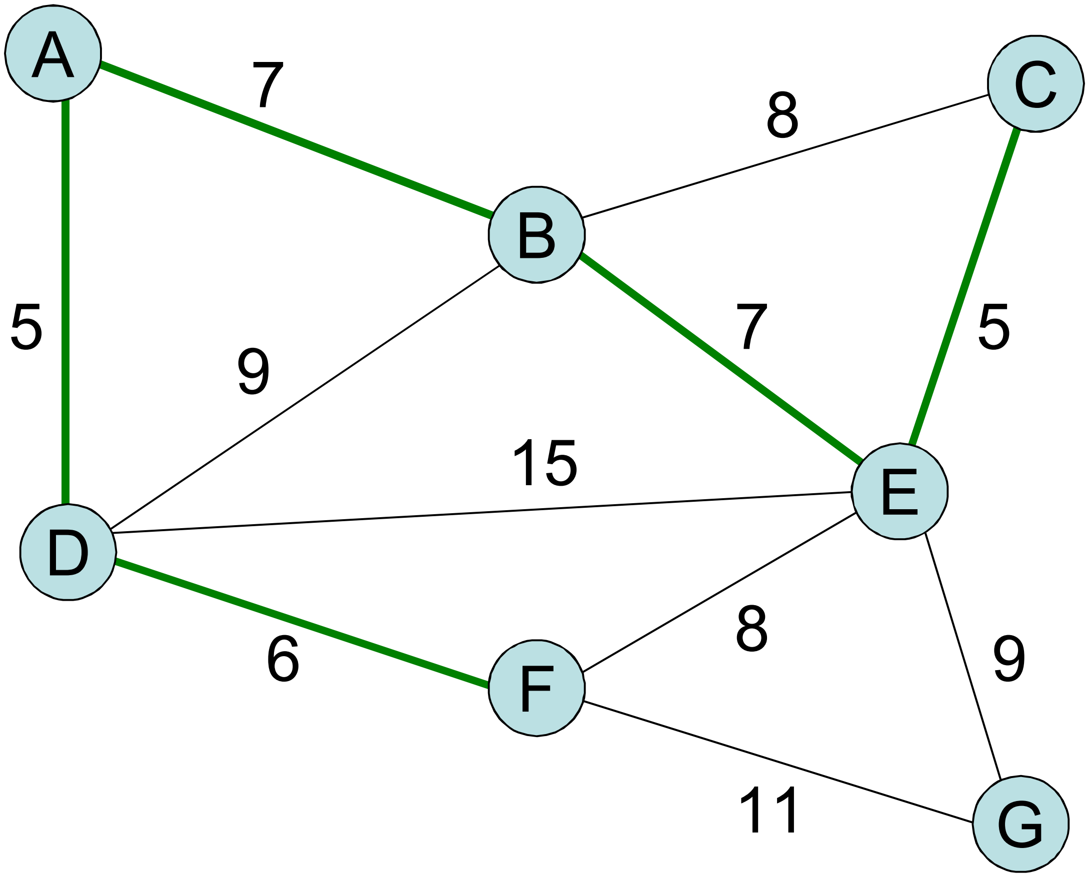
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15

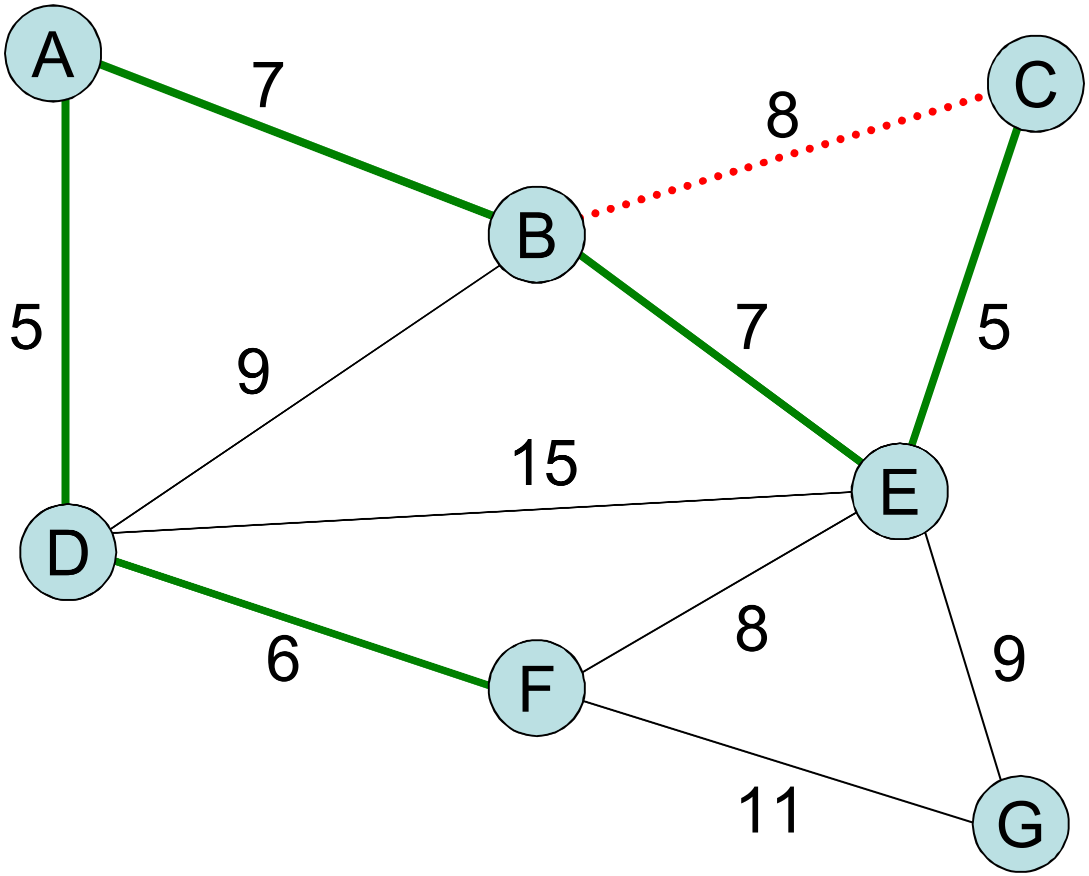


אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15



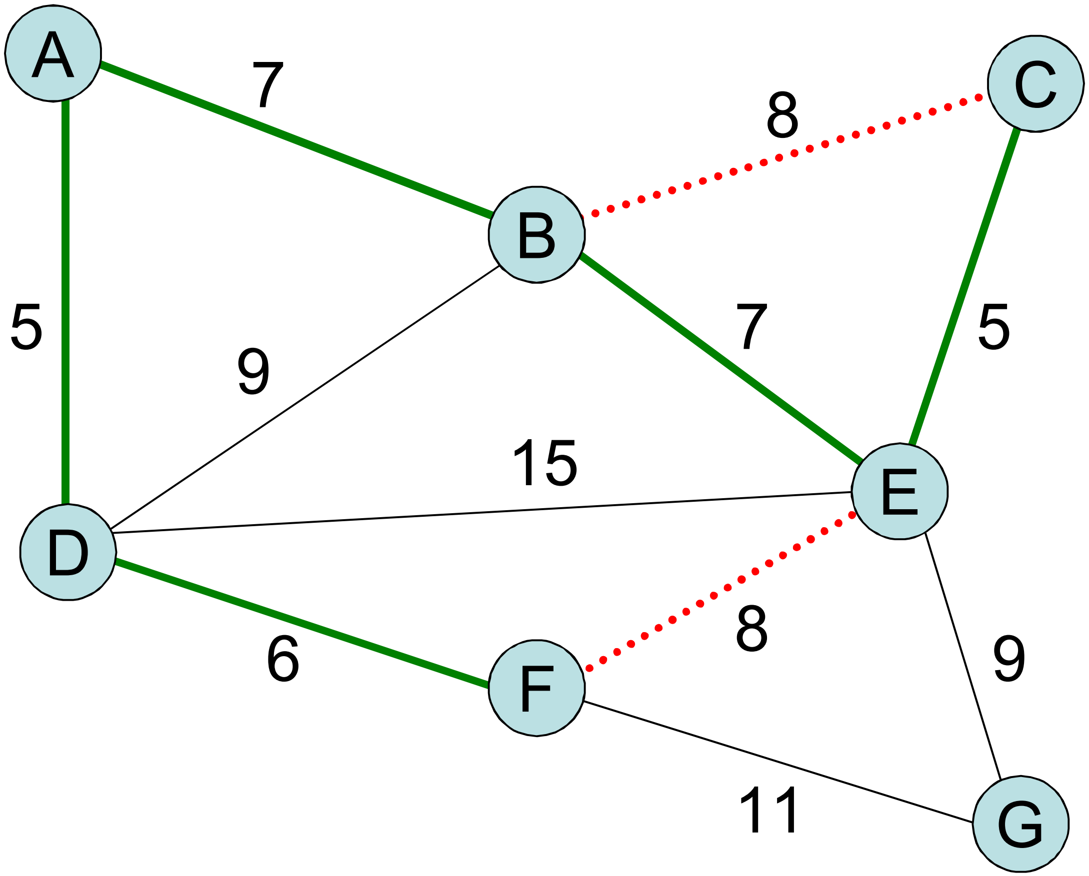
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא



AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15

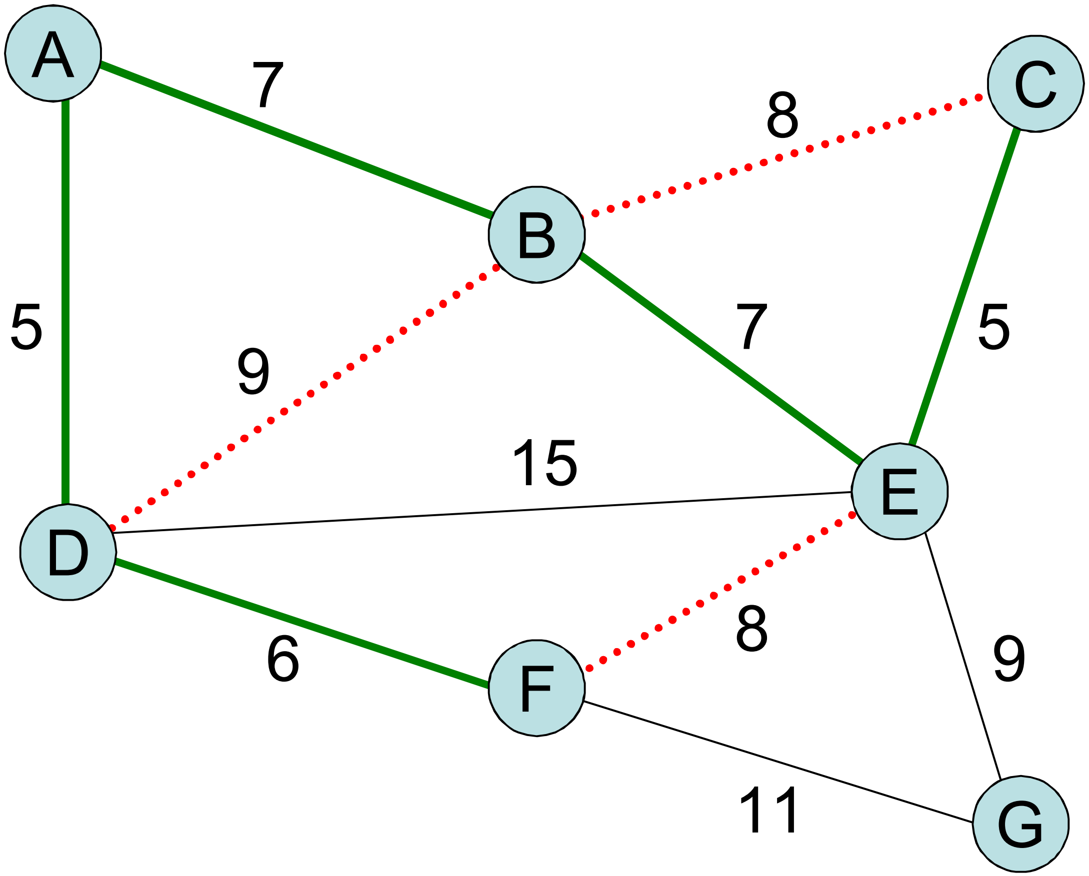
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15



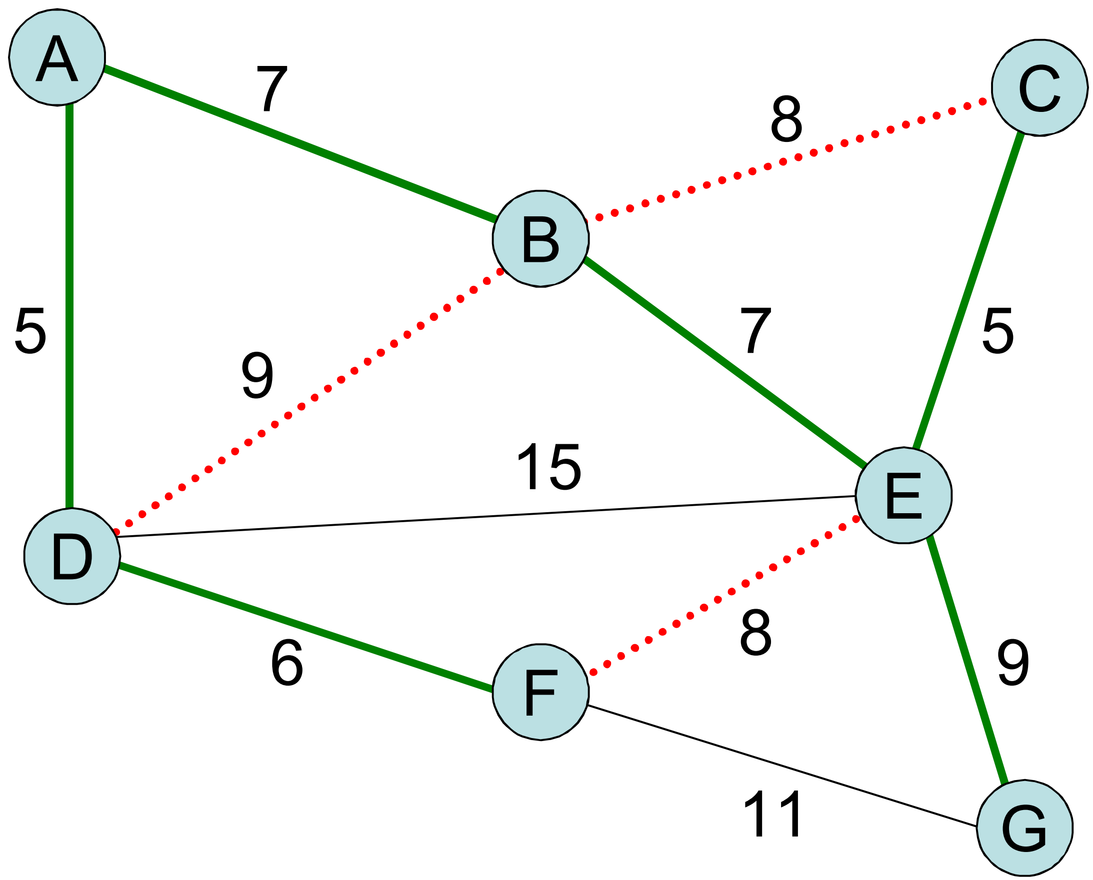
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15



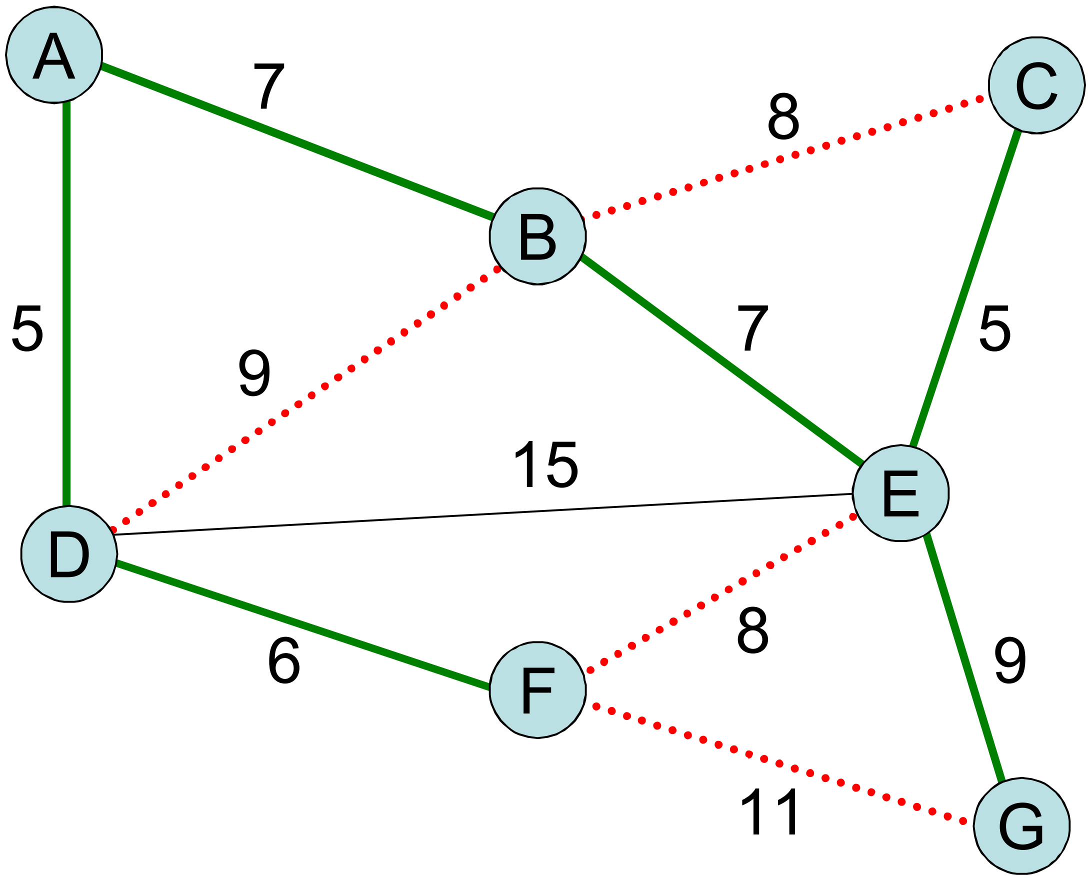
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15

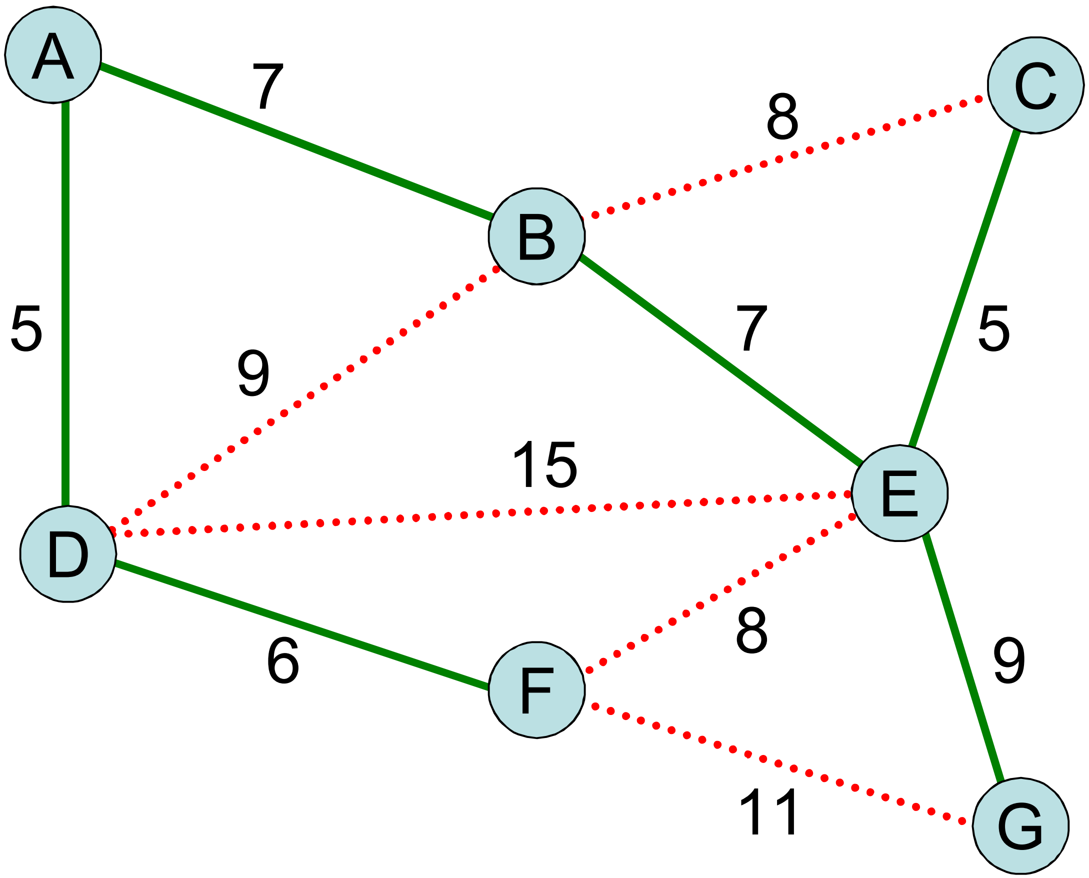


אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15

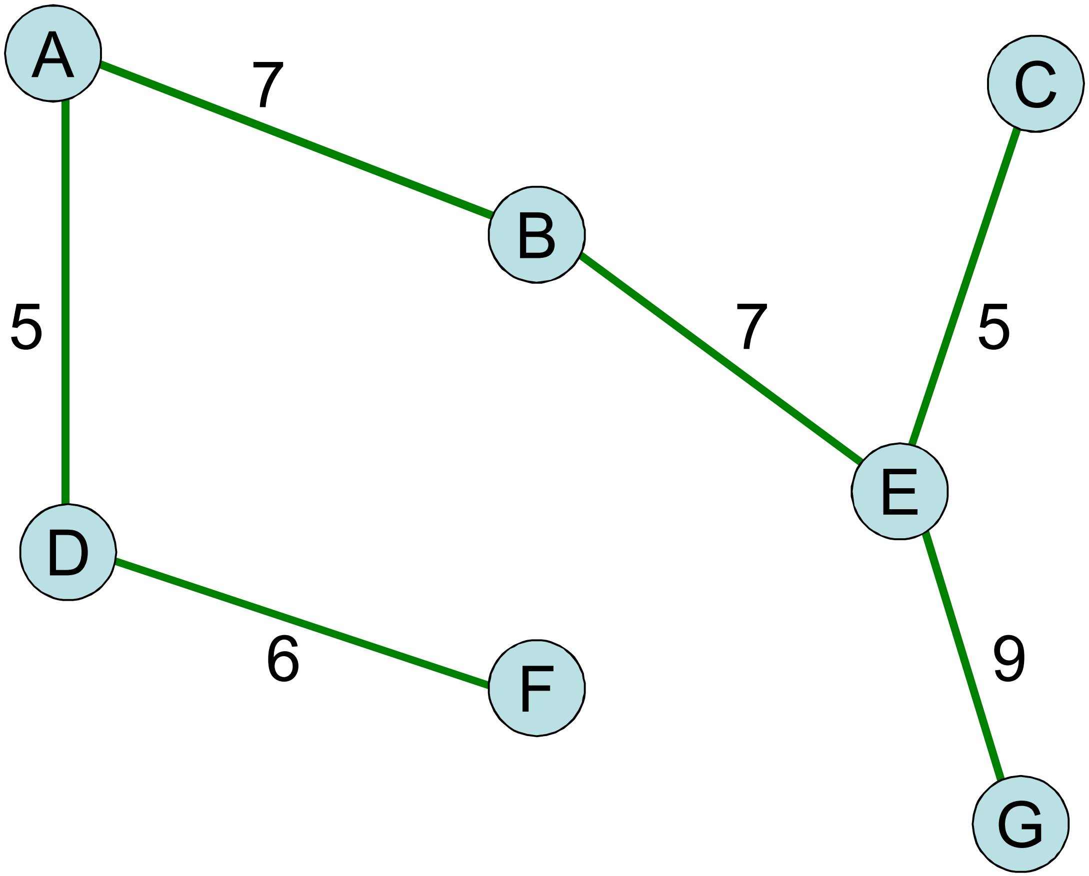


אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמלי - דוגמא



AD	5
CE	5
DF	6
AB	7
BE	7
BC	8
EF	8
DB	9
EG	9
FG	11
DE	15

אלגוריתם לבניית עץ פורש מינימלי - דוגמא

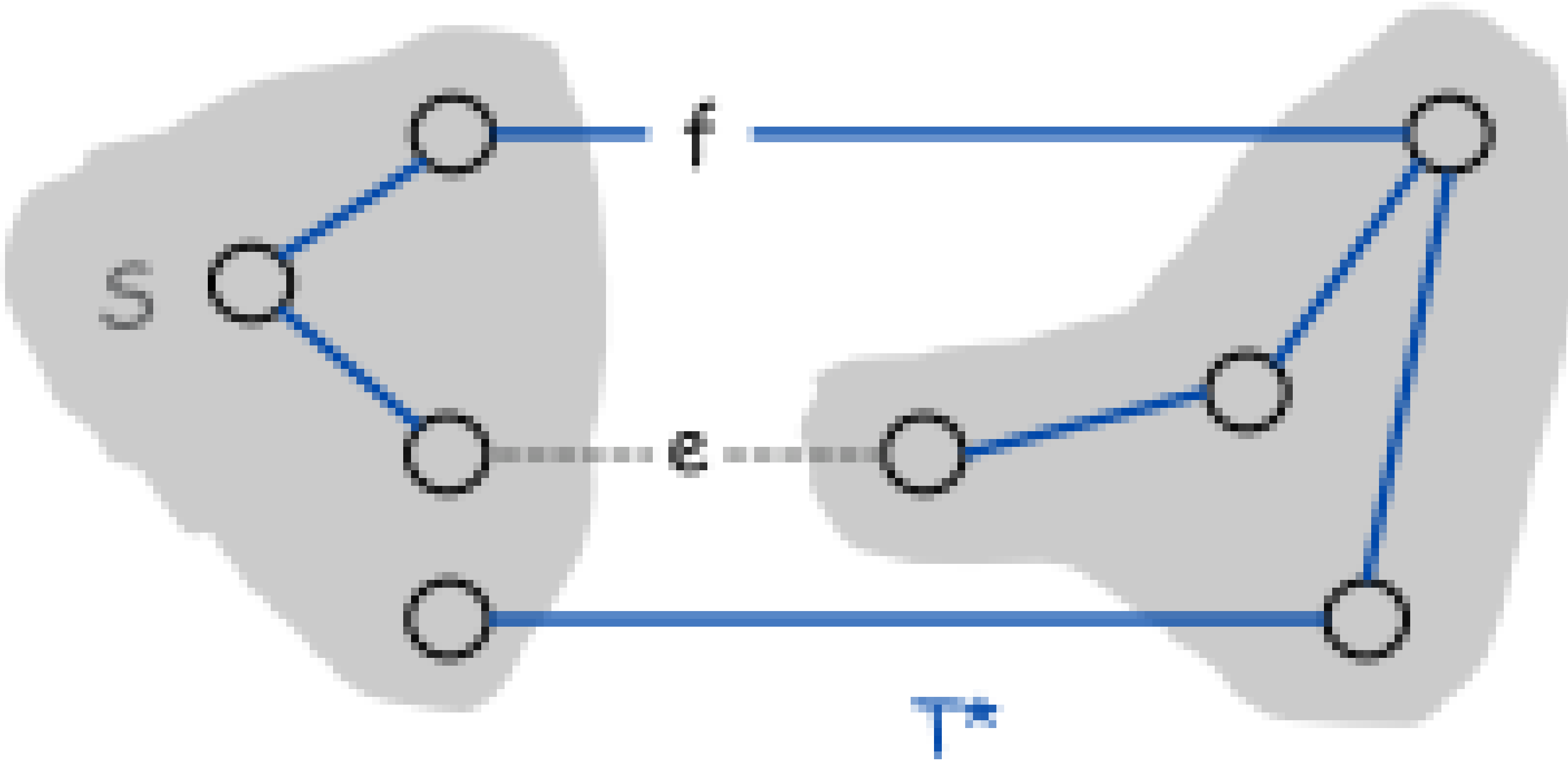


משקל העץ הוא: 5+5+6+7+7+9=39

נכונות האלגוריתם

- מאפיין החתך – יהי S תת קבוצה של קבוצת הקודקודים, ו-e הקשת בעלת המשקל המינימאלי שיש לה קודקוד יחיד ב-S. העץ הפורש המינימאלי, T*, מכיל את e.
- הוכחה (בדרך השלילה): נניח ש-e לא שייך לעץ הפורש המינימאלי, T*, נראה מה קורה:
  - הוספת הקשת e לעץ הפורש המינימאלי, T*, יוצרת מעגל C.
  - קשת אחרת במעגל C, נניח f, היא בעלת קודקוד יחיד ב-S .
  - $T=T^*+e-f$ גם הוא עץ פורש.
  - מכוון ש-$C_e<C_f$ מכאן ש-$Cost(T)<Cost(T^*)$, וזאת סתירה.

נכונות האלגוריתם

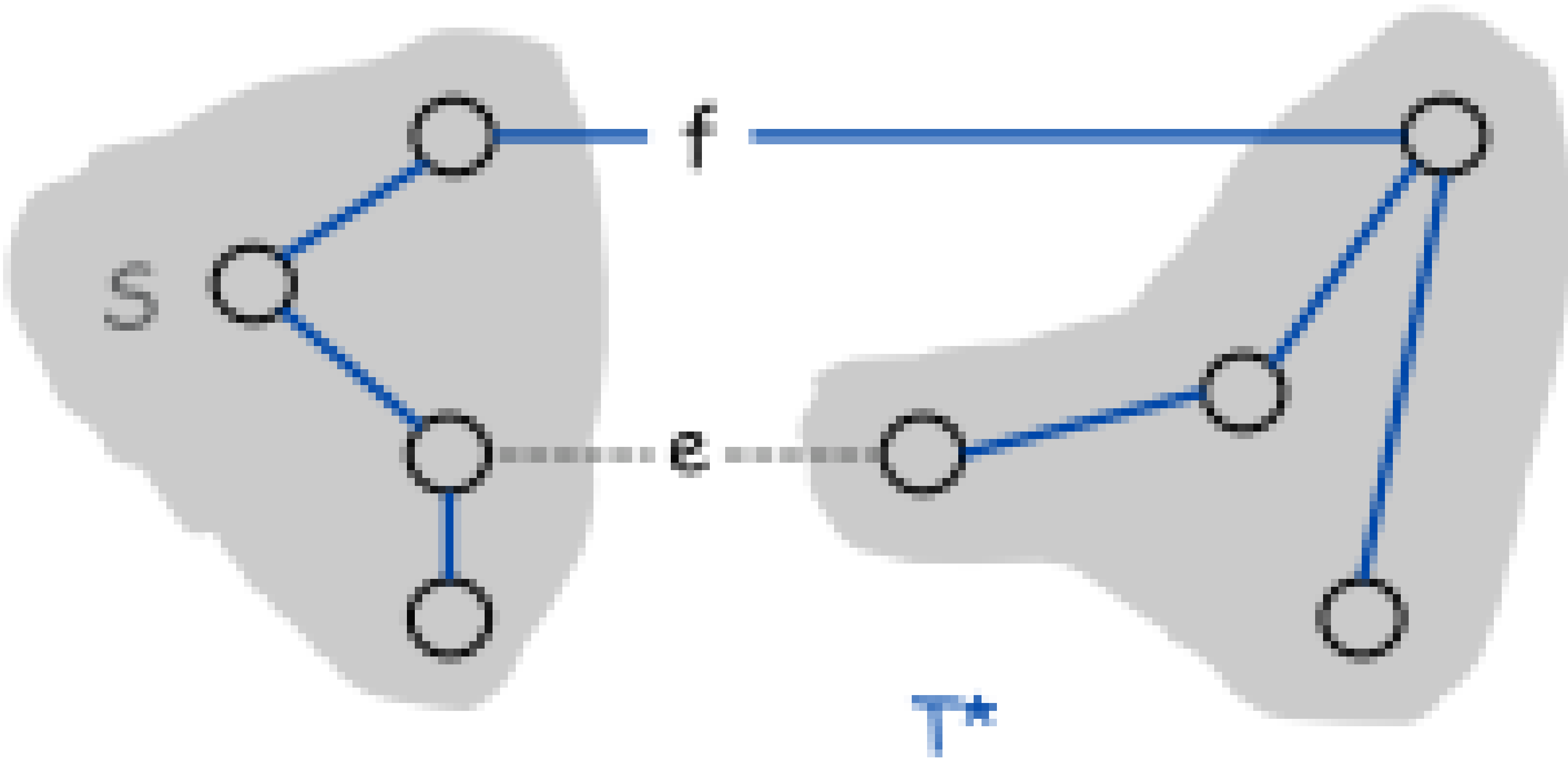


נכונות האלגוריתם

- מאפיין המעגל – יהי C מעגל כלשהו בגרף G, ו-f היא הקשת בעלת המשקל המקסימאלי ששייכת למעגל C. העץ הפורש המינימאלי, *T, אינו מכיל את f.

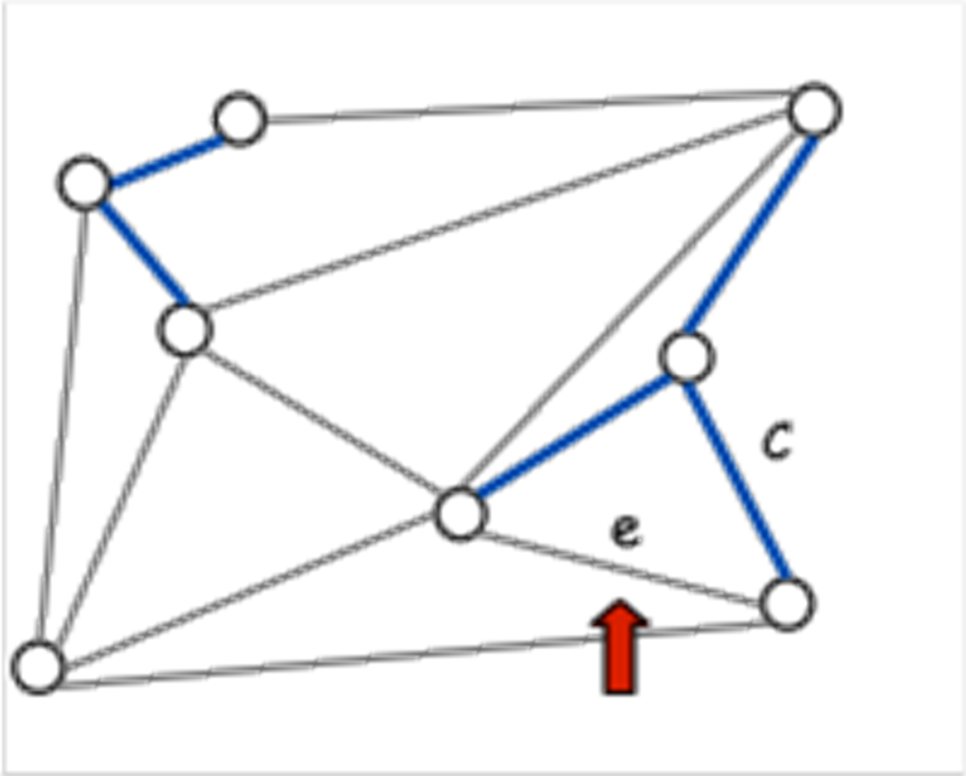
- הוכחה (בדרך השלילה): נניח ש-f שייך לעץ הפורש המינימאלי, *T, נראה מה קורה:
  - הסרת הקשת f מהעץ הפורש המינימאלי, *T, הופכת את *T לשני מרכיבים קשירים. יהי S אחד מהמרכיבים הקשירים.
  - קשת אחרת במעגל C, נניח e, היא בעלת קודקוד יחיד ב-S .
  - T=T*+e-f הוא גם עץ פורש
  - מכוון ש-$C_e<C_f$ מכאן ש-Cost(T)<Cost(T*), וזאת סתירה.

נכונות האלגוריתם



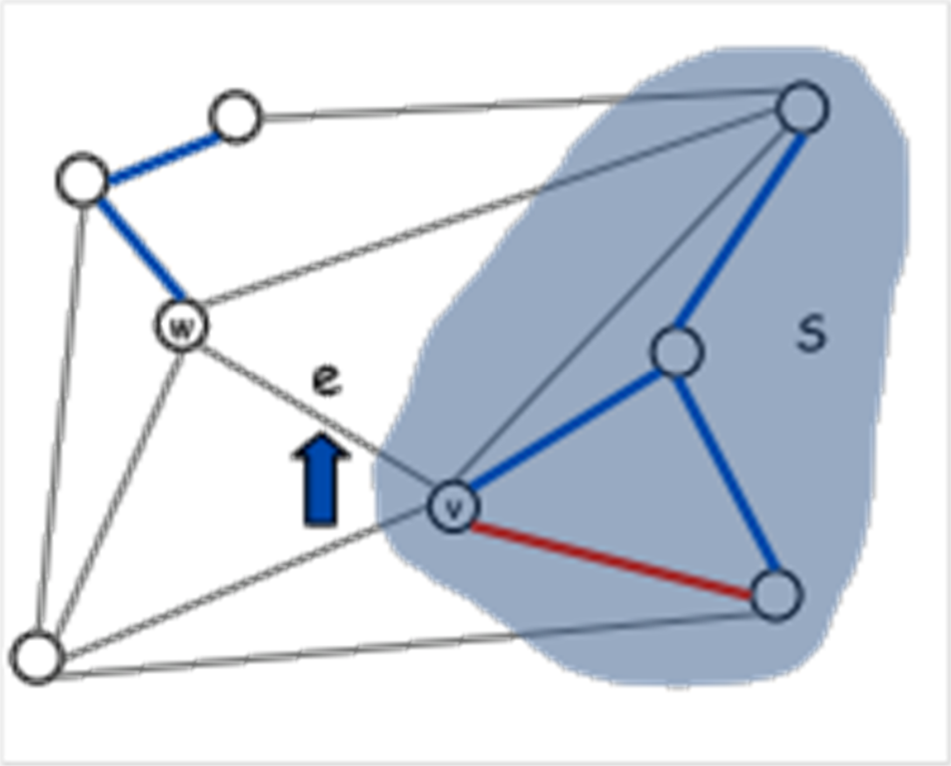
נכונות האלגוריתם

- מקרה 1:
  - אם הוספת הקשת e לגרף T יוצרת מעגל C, הרי ש-e היא הקשת בעלת המשקל הגבוה ביותר במעגל C. על פי מאפיין המעגל, הקשת e אינה שייכת לעץ הפורש המינימאלי.



נכונות האלגוריתם

- מקרה 2:
  - אם הוספת הקשת e=(v,w) לגרף T אינה יוצרת מעגל, הרי ש-e היא הקשת בעלת המשקל המינימאלי בעלת קודקוד יחיד ב-S. על פי מאפיין החתך, e שייכת לעץ הפורש המינימאלי.



תכונות של עצים פורשים והאלגוריתם של קרוסקל

- פלט האלגוריתם של קרוסקל תלוי בסדר מיון הקשתות
- אם לכל הקשתות משקלים שונים, האלגוריתם מייצר עץ יחיד
- האלגוריתם של קרוסקל יכול ליצר כל עץ פורש מינימאלי אפשרי
- עצים פורשים מינימאליים שונים זה מיזה בקשתות שלהם, אך לא במשקל שלהם

סיבוכיות

- סיבוכיות הינו מושג הלקוח ממדעי המחשב
- סיבוכיות מתארת התנהגות אלגוריתם כפונקציה של גודל הקלט
- לרוב מתייחסים לסיבוכיות הזיכרון ולסיבוכיות זמן הריצה
- ישנם מדדים שונים לחישוב הסיבוכיות, הנפוץ ביותר הוא ***O***.
- ***O***(N^2) – מציין שסיבוכיות האלגוריתם חסומה מלמעלה ע"י הפונקציה C*N^2

סיבוכיות אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימאלי

- בתחילת האלגוריתם יש לנו גרף ללא קשתות
- בכל שלב אנו בוחנים קשת בודדת, אם להוסיף אותה לעץ או לא
- אנו בוחנים אם אפשר להוסיף את כל הקשתות
- סיבוכיות האלגוריתם תלוייה במספר הקשתות שקיימות בגרף
- סיבוכיות האלגוריתם עבור הגרף, $G=(V,E)$, היא $O(|E|)$

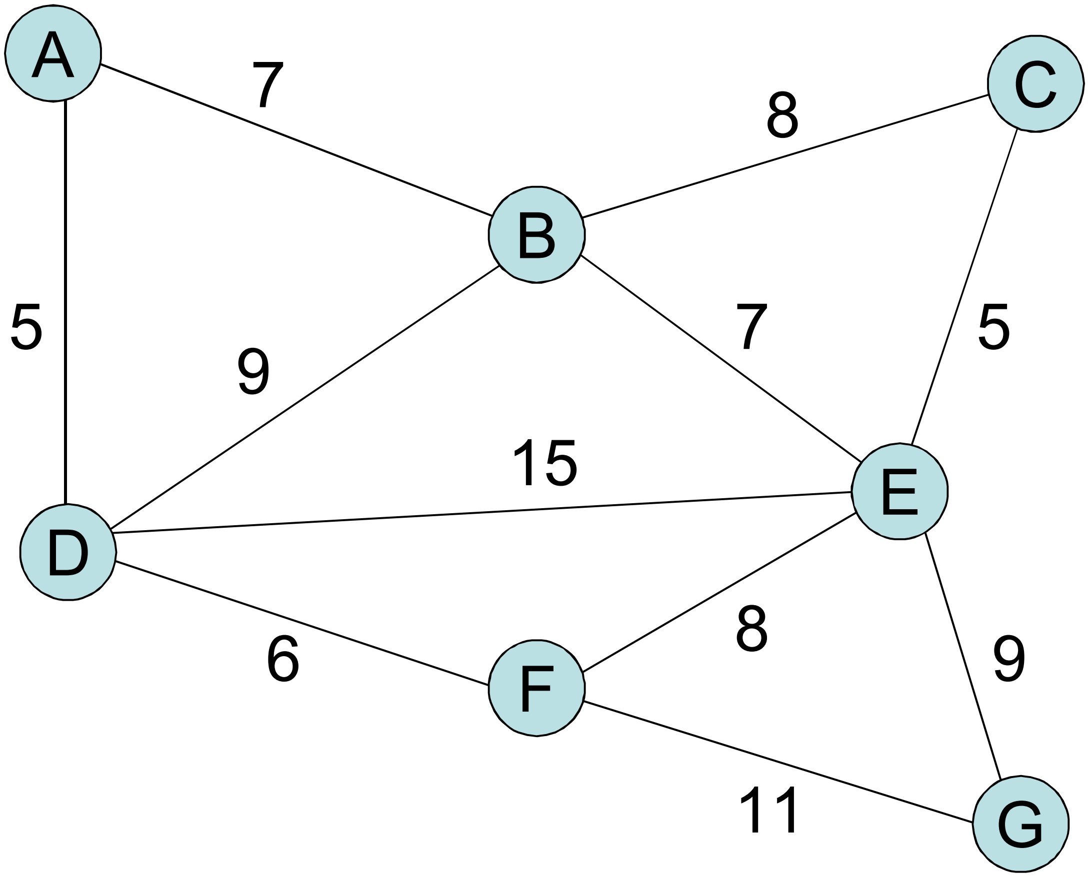
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינימלי (פרים)

להלן השלבים לבניית עץ פורש מינימאלי לפי האלגוריתם של פרים

1. $T_E=\emptyset$,$T_V=\emptyset$
2. נכניס לקבוצה T_V קודקוד אקראי
3. כל עוד $|T_E|$ קטן מ-(|V|-1) נבצע את השלבים הבאים
   1. נחפש קשת (u,v) בעלת משקל מינימאלי כך ש-$u\in T_V$ ו-$v\notin T_V$. בגלל ש-(3) מתקיים, חייבת להיות קשת כזו
   2. נוסיף את (u,v) לקבוצה T_E
   3. נוסיף את v ל-T_V

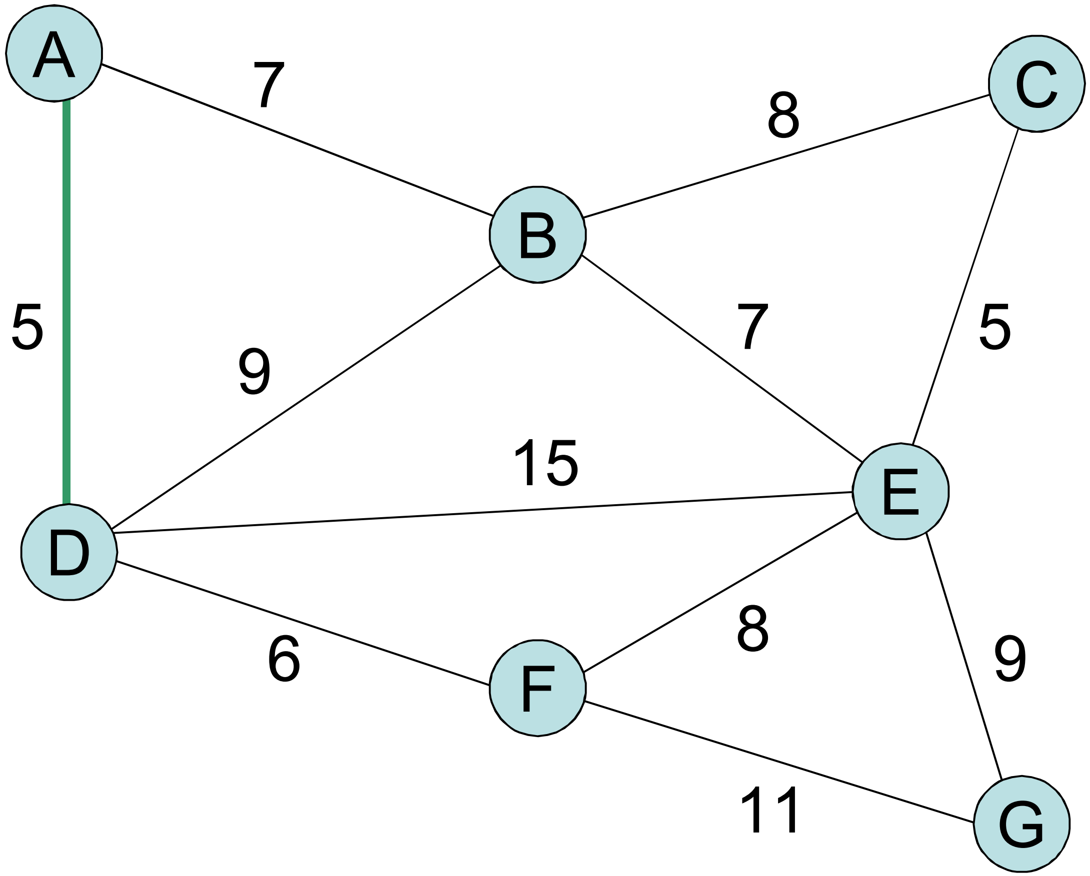
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

T_V	T_E
A	



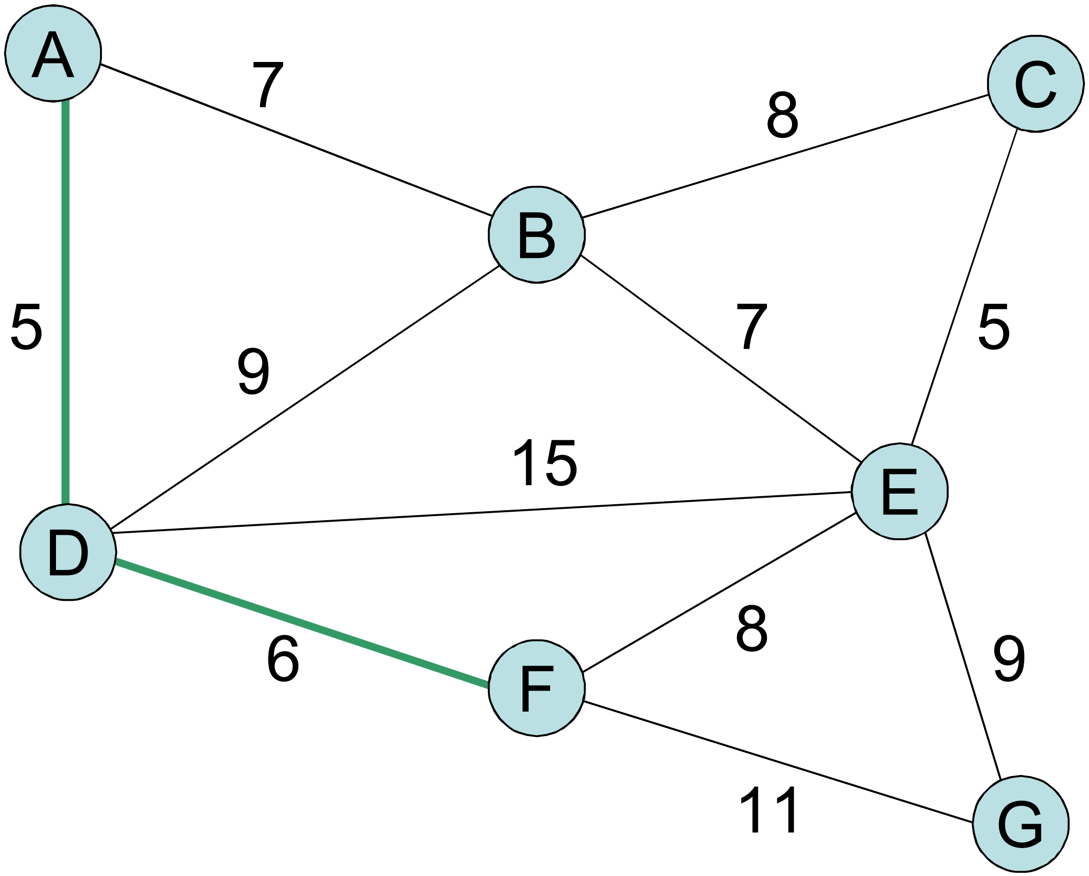
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

T_V	T_E
A	AD
D	



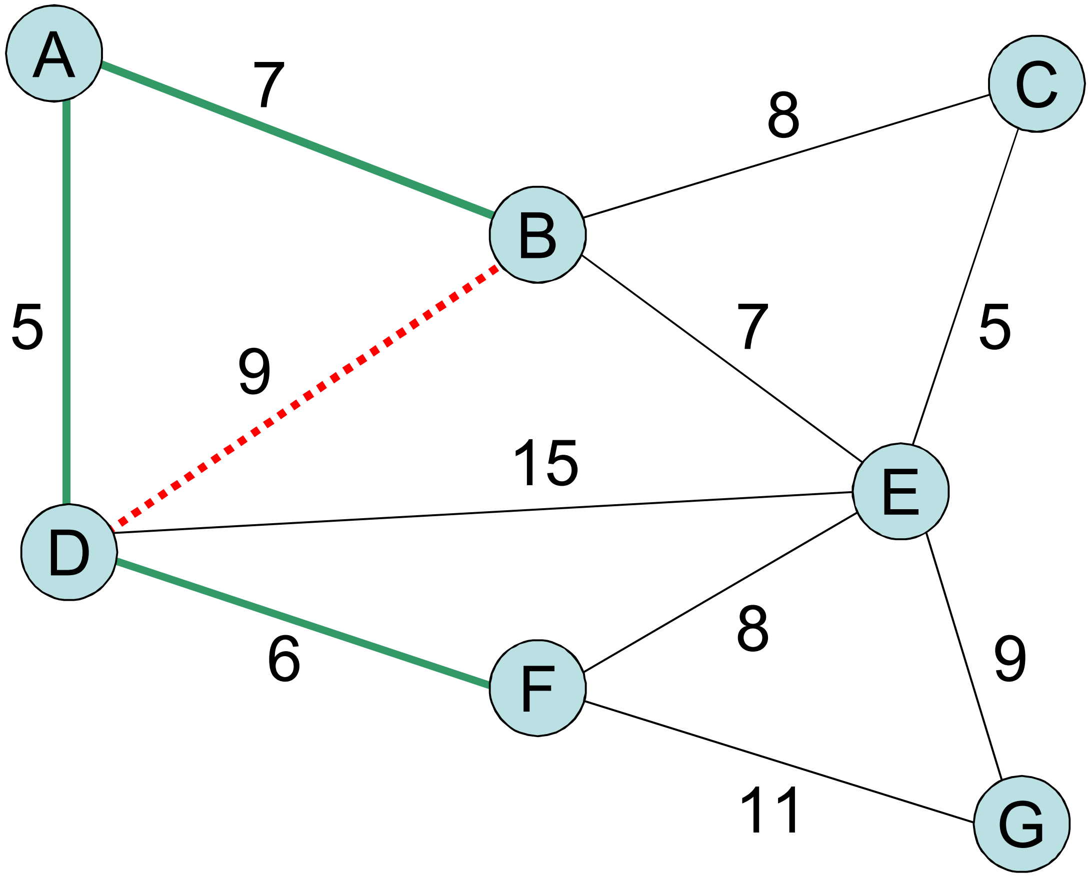
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

T_V	T_E
A	AD
D	DF
F	



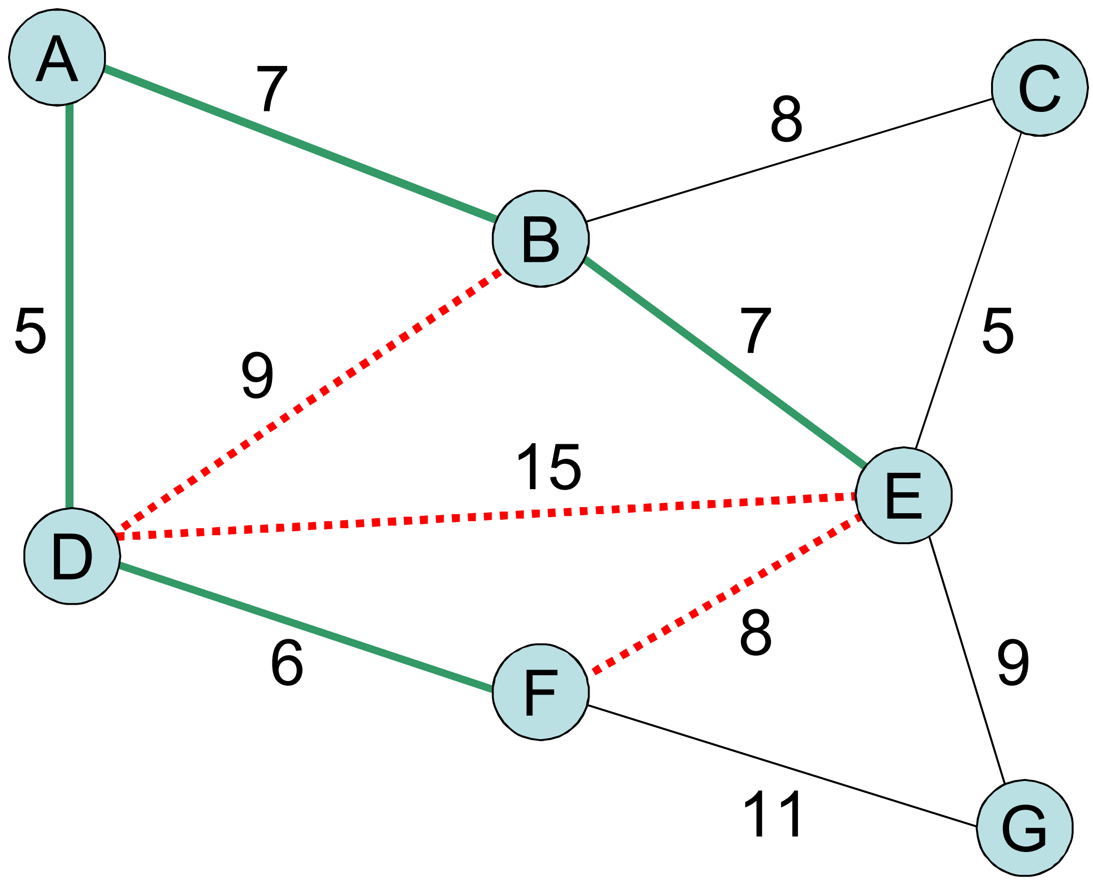
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

T_V	T_E
A	AD
D	DF
F	AB
B	



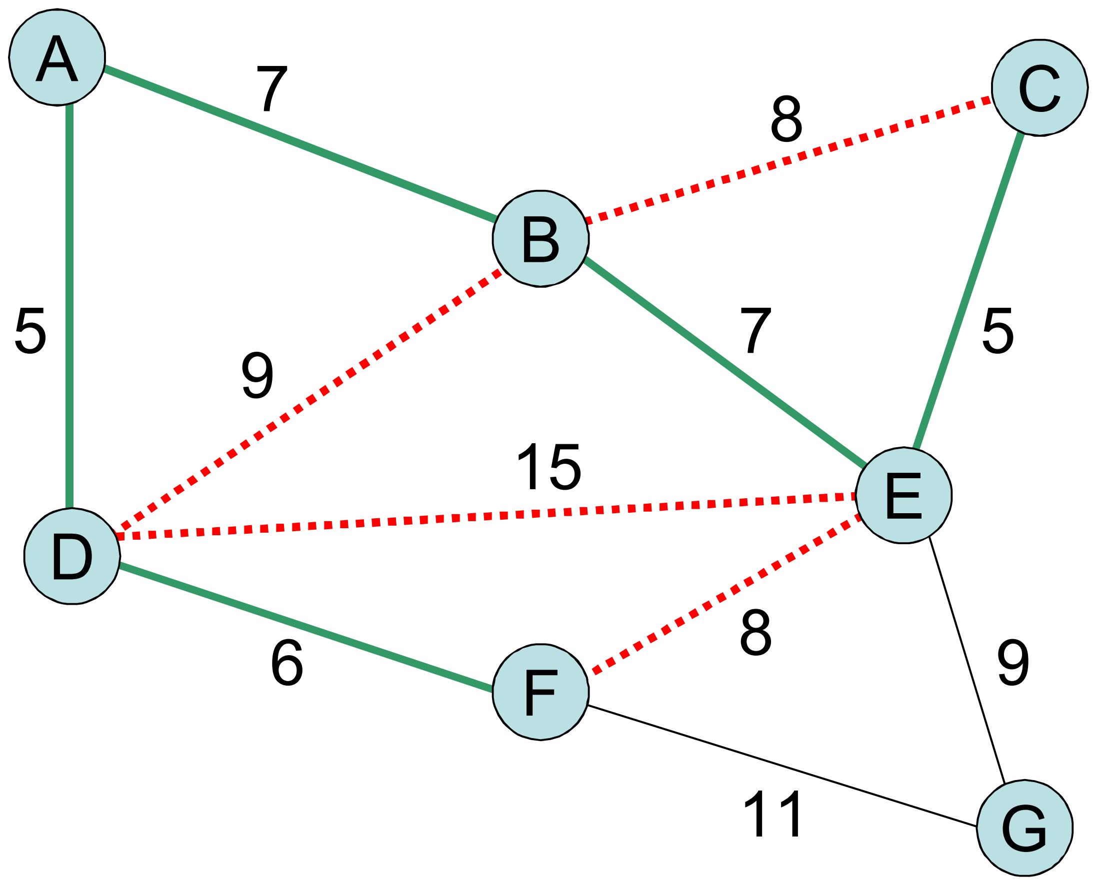
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

T_V	T_E
A	AD
D	DF
F	AB
B	BE
E	



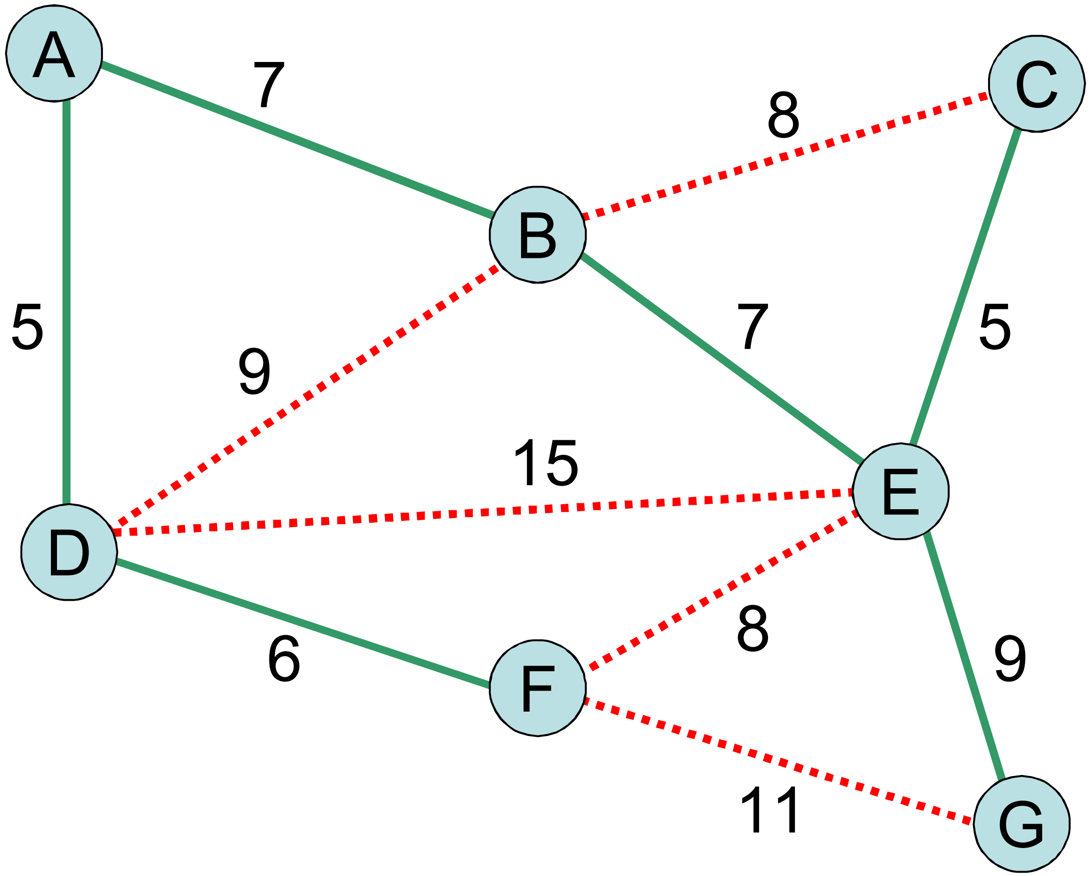
אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

T_V	T_E
A	AD
D	DF
F	AB
B	BE
E	EC
C	



אלגוריתם לבניית עץ פורש מינמאלי - דוגמא

T_V	T_E
A	AD
D	DF
F	AB
B	BE
E	EC
C	EG
G	



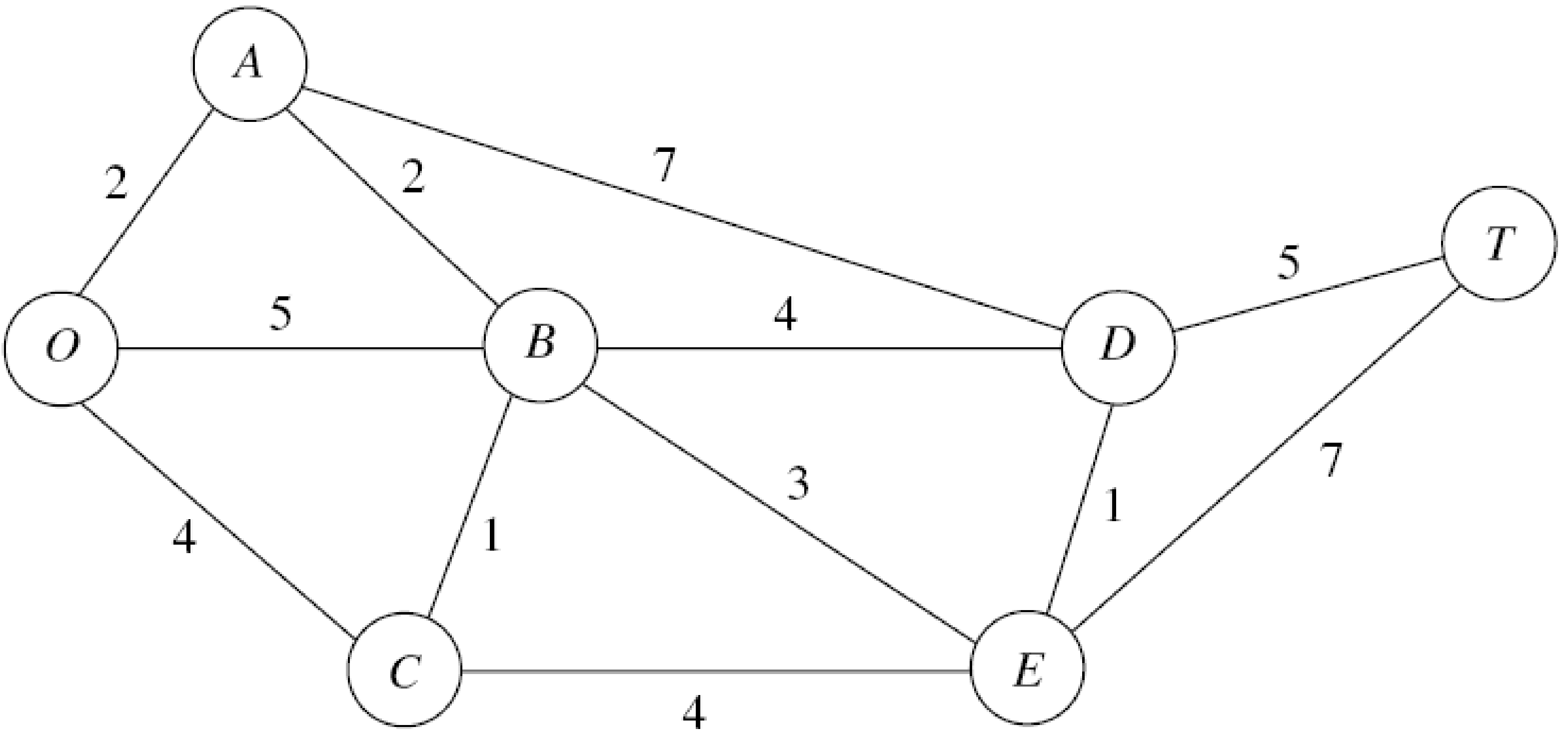
נכונות האלגוריתם של פרים

- נתון $G=(V,E,w)$ הוא גרף קשיר.
- האלגוריתם בונה עץ פורש במספר איטרציות, כשבכל איטרצייה אנו מוסיפים קשת וקודקוד לעץ הניבנה, T. הקשת שמתחברת הינה קשת שבצד אחד יש לה קודקוד שנמצא ב-T ומצד שני קודקוד שאינו ב-T.
- מכוון ש-G הוא גרף קשיר, קיים מסלול לכל קודקוד. לכן הפלט של האלגוריתם הוא עץ, מכוון שהקשתות והקודקודים שמתווספים ל-T מחוברים (קשירים).
- T הוא עץ פורש מינימאלי של G, אחרת:
  - תהי $e=(u,v)$ הקשת הראשונה שהוספנו ל-T אשר אינה שייכת לעץ הפורש המינימאלי, ו-V’ קבוצת הקודקודים שקיימים ב-T לפני הוספת הקשת e.

נכונות האלגוריתם של פרים

- בעץ הפורש המינימאלי קיים מסלול בין u ל-v. במסלול הזה קיימת לפחות קשת אחת, f, שלה יש קדקוד שאינו ב-V’.
- באותה איטרצייה שהוספנו את e היינו יכולים להוסיף את f, אבל רק אם משקלו קטן מהמשקל של e, ולכן אנו יכולים להסיק ש: $w(f)\geq w(e)$.
- נגדיר כ-T’ את הגרף שמתקבל לאחר הורדה של f והוספה של e לעץ הפורש המינימאלי.
- ניתן להראות ש-T’ הוא גרף קשיר, בעל מספר קשתות זהה לזה של העץ הפורש המינימאלי והמשקל שלו לא גדול מהמשקל של העץ הפורש המינימאלי, ולכן T’ הוא עץ פורש מינימאלי אשר מכיל את e ואת כל הקשתות שנוספו קודם להוספה של e (כחלק מהבנייה של V’).
- ניתן לחזור על התהליך הזה עבור כל קשת ב-T, ולכן T הוא עץ פורש מינימאלי.

עץ פורש מינימאלי – דוגמא נוספת




חג פסח שמח
מנטע, נועה, לימור ואורן נחום
MOSES TRANSPORTS
NEXT
4 MILES