1. תורת המידה

1.1. מבוא

נסמן ב- Ω את מרחב כל התוצאות האפשריות. כל תוצאה אפשרית יחידה ב- Ω נסמן כ- ω. אירוע הוא תת-קבוצה של תוצאות $A \subset \Omega$. אם קיבלנו ω, אשר מקיים $\omega \in A$, הרי שהאירוע A התקיים. על פי טרמינולוגיה זאת, איחוד של קבוצות משמעו "או", וחיתוך של קבוצות משמעו "וגם". המשלים של קבוצה משמעו "שלילה".

קיימת פונקצית הסתברות, $f\left(\omega \in \Omega\right): \Omega \to \left[0,1\right]$. מכוון שההסברות מנורמלת, מתקיים $\sum_{\omega \in \Omega} f\left(\omega\right) = 1$.

נסמן ב- $\mathcal{F}$ הוא אוסף של האירועים האפשריים, כלומר $\mathcal{F} = \left\{A_1, ..., A_n \mid \forall k,\ A_k \subseteq \Omega\right\}$.

הגדרה 1: **שדה**

$\mathcal{F}$ נקרא שדה אם מתקיים:
1. $\varnothing \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ (ובצורה מורחבת: $\left(\forall k = \{1, ...n\},\ A_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}\right)$

המשלים, A^C, מוגדר כ- $A^C = \Omega \setminus A$. מ-(1) ומ-(2) אנו מקבלים ש- $\Omega \in \mathcal{F}$. כמו כן, בהסתמך על חוקי דה-מורגן ועל (3), מתקבל $A \cup B \in \mathcal{F}$.

הגדרה 2: סיגמה-שדה

שדה הוא סיגמה שדה אם 3 מתקיים בצורה הבאה: $\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

הגדרה 3: פונקצית הסתברות

פונקצית ההסתברות $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ היא פונקציה המקיימת את התכונות הבאות:

1. $\forall A\in\mathcal{F},\ P(A)\ge 0$
2. $P(\varnothing)=0$
3. $P(\Omega)=1$
4. $\forall A,B\in\mathcal{F},\ A\cap B=\varnothing\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (בצורה מורחבת, אם $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{F}$ זרות, כלומר $\forall i\ne j, A_i\cap A_j=\varnothing$, אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$)
5. $P(A^C)=1-P(A)$

הגדרה 4: פונקציה אדטיבית וסיגמה אדטיבית

פונקציה שמקיימת את 4 נקראת אדטיבית. אם $n=\infty$, אז הפונקציה היא סיגמה אדטיבית

1.2. בניה של מידה

הגדרה 5: מידה

מידה היא פונקציה המתאימה מספר אי-שלילי לתת-קבוצה של מרחב נתון. לדוגמה: $\forall k,\ A_k\in\mathcal{F},\ \mu:A_k\to[0,\infty)$

מידה צריכה לקיים:

1. $\mu(\varnothing)=0$
2. מידה היא סיגמה אדטיבית

הגדרה 6: מרחב הסתברויות

מרחב הסתברות הוא השלשה $(\Omega,\mathcal{F},P)$, כש-Ω הוא קבוצת תוצאות אפשריות, $\mathcal{F}$ הוא סיגמה-שדה של אירועים מ-Ω ו-$P:\mathcal{F}\to[0,1]$ פונקציה שמקצה הסתברות לאירוע. פונקצית ההסתברות היא מידה.

$A_n\nearrow A$ פונקציה עולה, כלומר $A_n\subseteq A_{n+1}$

$A_n\searrow A$ פונקציה יורדת, כלומר $A_{n+1}\subseteq A_n$

הגדרה 7: מידת לבג

תהי $f(x)$ בעלת התכונות הבאות:

1. $f(x)$ מונוטונית עולה ($\forall x\ge y\quad f(x)\ge f(y)$)
2. $f(x)$ רציפה מימין ($\forall x\in\mathbb{R}\ \lim_{u\to x}f(x)=f(u)$)
3. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$
4. $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$

נגדיר $F(b)-F(a)=P(I_{a,b})$

מידה לבג' היא פונקצית הסתברות, שבה ההסתברות לקטע היא אורך הקטע

אם $f(x)$ גזירה, אז $P(I_{a,b})=\int_a^b f(x)dx$

1.3. אינטגרציה

הגדרה 8: משתנה מקרי

נגדיר $\mathbb{R}^n=\{(x_1,...,x_n):x_i\in\mathbb{R}\}$. קבוצת בורל, $\mathcal{B}$, היא הסיגמה שדה

משתנה מקרי הוא פונקציה $f:\Omega\to\mathbb{R}$ כך שעבור כל קבוצת בורל, $\mathcal{B}$, מתקיים $f^{-1}(\mathcal{B})=\{\omega\in\Omega: f(\omega)\in\mathcal{B}\}\in\mathcal{F}$

דוגמא:

$\Omega=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}=B$ וכן $f(x)=x$. ניקח A כלשהו, $A\in\mathcal{B}$, ונציב $f^{-1}(A)=(\forall x\in A, f(x)=x, x\in A)$ ומכן $f^{-1}(A)=A$.

הגדרה 9: פונקציה אופיינית

הפונקציה האופיינית (indicator function) של קבוצה $A\in\Omega$ היא $1_A:\Omega\to\mathbb{R}$ כך ש:

$1_A(\omega)=\begin{cases}0 & \omega\notin A\\ 1 & \omega\in A\end{cases}$.

אינטגרלים:

המטרה להגדיר אינטגרל $\int f(x)dp$ לכל פונקציה מדידה f.

1. פונקציה אופיינית 1_A מדידות ($A\in\mathcal{F}$): $\int 1_A(\omega)dp=P(A)$.
2. פונקציות פשוטות: $f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i 1_{A_i}(\omega)$ כך ש: $A_i\in\mathcal{F}$, וכן A_i זרות:
$$\int f(\omega)dp=\sum_{i=1}^{k}c_1 P(A_i)$$
3. פונקציה מדידה (פונקציה שהתחום והטווח שלה הם מרחבים מדידים) וחסומה (פונקציה שכל ערכיה קטנים בערכם המוחלט מקבוע כלשהו): $\int fdp=\lim_{n\to\infty}\int f_n dp$

דוגמא:

ניקח את מידת לבג' $P[a,b]=b-a$, נקבל את אינטגרל ריימן $\int 1_{[a,b]}dp=b-a$

1.4. התכנסות סדרות של פונקציות

הגדרה 10: התכנסות בכל מקום / נקודתית

$f_n(\omega) \to f(\omega)$ מתכנסת נקודתית (בכל מקום) אם $\forall \omega \in \Omega, \ \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \to f(\omega)$.

דוגמא: נתבונן על הפונקציה x^n מעל $[0,1]$ (מידת לבג', התפלגות אחידה בקטע), עבור $[0,1)$, $x^n \to 0$, עבור $x=1$, $x^n \to 1$.

הגדרה 11: התכנסות כמעט בכל מקום

$f_n(\omega) \to f(\omega)$ מתכנסת כמעט בכל מקום אם קיימת קבוצה $N \in \mathcal{F}$, שעבורה $P(N)=0$, אשר מקיימת $\forall \omega \notin N, \ \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \to f(\omega)$.

הגדרה 12: התכנסות במידה

$f_n(\omega) \to f(\omega)$ מתכנסת במידה (בהסתברות) אם מתקיים $\forall \epsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P\left[\omega : \left|f_n(\omega) - f(\omega)\right| \geq \epsilon\right] = 0$.

משפט 1: אי-שוויון ג'נסן

אם $\phi(x)$ היא פונקציה קעורה, וכן $f(\omega)$ וגם $\phi(f(\omega))$ אינטגרביליות, אז $\int \phi(f(\omega))dP \geq \phi\left(\int f(\omega)dP\right)$

1.5. מרחבי מכפלה

נתונים שני מרחבי הסתברות $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ ו-$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$. אנו מגדירים:

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$
2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$
3. $P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \times P_2(A_2)$

1.6. פיזור ותוחלת

הגדרה 13: תוחלת / ממוצע

התוחלת או הממוצע של משתנה אקראי מוגדר כ: $\mathbb{E}[x] = \mathbb{E}^P[x] = \int x(\omega)\,dp$

באופן דומה, הממוצע של משתנה מיקרי x בהסתברות P מוגדר כ: $\mathbb{E}[g(x)] = \mathbb{E}^P[g(x)] = \int g(x(\omega))\,dp$, כאשר g מדידה.

2. התכנסות חלשה

תהי α מידת הסתברות על $\mathbb{R}$, $\alpha([a,b]) \to [0,1]$, הפונקציה האופיינית של α היא $\phi(t) = \int e^{itx}d\alpha$.

דוגמא:

אם α נתונה ע"י התפלגות רציפה עם צפיפות $f\left(x\right)$ (למשל נורמאלית $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$), אז $d\alpha=f\left(x\right)dx$, $\phi\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{itx}dx$.

הגדרה 14: מומנט של משתנה מקרי

עבור משתנה מקרי x ומספר שלם k, המומנט ה-k-י של x מוגדר ע"י: $m_k=\mathbb{E}\left[x^k\right]$.

המומנט הראשון:

$\phi\left(t\right)=$

הגדרה 15: משתנה ברנולי

משתנה בעל שני מצבים, 0 ו-1, נקרא משתנה ברנולי. את ההסתברות לקבלת 1 מסמנים ע"י p ואת ההסתברות לקבלת 0 מסמנים ע"י q (ששווה ל-$1-p$).

הגדרה 16:

סידרת מידות α_n מעל $\mathbb{R}$ מתכנסת למידה α באופן חלש ($\alpha_n\to\alpha$), אם בכל קטע $\left[a,b\right]$ מתקיים $\alpha\left[\left\{a\right\}\right]=\alpha\left[\left\{b\right\}\right]$ אז $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\left[a,b\right]\to\alpha\left[a,b\right]$.

הגדרה 17:

סדרת פונקציות התפלגות, $F_n\left(x\right)$, מתכנסות לפונקצית התפלגות $F\left(x\right)$ באופן חלש, אם לכל a, כך ש:$f(x)$ רציפה ב-a, $\lim_{n\to\infty}F_n\left(a\right)\to F\left(a\right)$. נסמן זאת כ: $F_n\Rightarrow F$.

משפט 2: לוי-קרמר

תהי F פונקצית התפלגות של המידה α, ו-F_n פונקצית התפלגות של המידה α_n. ϕ היא פונקציה אופיינית של α, ו-ϕ_n היא פונקציה אופיינית של α_n, אז התנאים הבאים שקולים:

1. $\alpha_n\Rightarrow\alpha$
2. $F_n\Rightarrow F$
3. $\forall t,\ \lim_{n\to\infty}\phi_n\left(t\right)\to\phi\left(t\right)$
4. לכל $g\left(x\right)$ חסומה ורציפה $\lim_{n\to\infty}\int gd\alpha_n\to\int gdx$

3. סכומים בלתי תלויים

הגדרה 18: אירועים בלתי תלויים

שני אירועים $A,B\in\mathcal{F}$ נקראים בלתי תלויים אם $P\left[A\cap B\right]=P\left[A\right]P\left[B\right]$

$P\left[A\cap B\right]=P\left[A\right]-P\left[B\right]$

הגדרה 19: משתנים בלתי תלויים

שני משתנים אקראיים, x ו-y, נקראים בלתי תלויים אם עבור האירועים A ו-B מתקיים $A,B\in\mathcal{B}$ וכן מתקיים $P\left[x\in A,y\in B\right]=P\left[x\in A\right]P\left[y\in B\right]$.

$$P\left[x\in A\cap y\in B\right]=P\left[x\in A\right]\times P\left[y\in B\right]$$

למה 1:

x,y משתנים בלתי תלויים. $z=x+y$. אם x משרה מידה α_x.

למה:

נסמן את הפונקציה האופיינית של x ב-$\phi_x\left(t\right)$, של y ב-$\phi_y\left(t\right)$ ושל z ב-$\phi_z\left(t\right)$.

$\phi_z\left(t\right)=\phi_x\left(t\right)\times\phi_y\left(t\right)$.

למה:

אם x,y בלתי תלויים, אז מתקיים:

1. $\mathbb{E}\left[f\left(x\right)\times g\left(y\right)\right]=\mathbb{E}\left[f(x)\right]\times\mathbb{E}\left[g\left(y\right)\right]$
2. $\mathbb{E}\left[x+y\right]=\mathbb{E}\left[x\right]+\mathbb{E}\left[y\right]$
3. $Var\left[x+y\right]=Var\left[x\right]+Var\left[y\right]$

אי-שוויון צבישב:

$$P\left[\left|x-\mathbb{E}\left[x\right]\right|\geq\delta\right]\leq\frac{Var[x]}{\delta^2}$$

משפט 3: חוק המספרים הגדולים (גרסה חלשה)

אם $x_1,...,x_n$ המספרים אקראיים בלתי תלויים זהים, בעלי ממוצע $\mathbb{E}\left[x_i\right]=m$ ו- $Var\left[x_i\right]=\sigma^2$. נסמן $S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$. מתקיים $\frac{S_n}{n}-m$ מתכנס באופן חלש להתפלגות המניות ב-0. כלומר, לכל $\epsilon\geq 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}P\left[\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geq\epsilon\right]=0$.

למה 2:

יהי x משתנה אקראי עם פונקציה אופיינית α, אז הפונקציה האופיינית של $Y=ax$ היא $\int e^{itax}f_x\left(x\right)dx=\phi\left(at\right)$.

משפט 4: חוק המספרים הגדולים (גרסה חזקה)

$x_1,...,x_n$ מספרים אקראיים בלתי תלויים זהים. נסמן $S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$. $\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}(x)$ מתכנס כמעט בכל מקום ל- δm (לפונקציה הקבועה m), כלומר $P\left[\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=m\right]=1$.

משפט 5: משפט הגבול המרכזי

תהי $x_1,...,x_n$ סדרת מספרים אקראיים בלתי תלויים זהים, בעלת ממוצע (תוחלת) $\mathbb{E}[x_i]=m<\infty$ ושונות $Var[x_i]=\sigma^2$.

נסמן $S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$. המשתנה $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ שואף באופן חלש למשתנה הנורמאלי עם צפיפות $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

אם $m\neq 0$, אז יתכנס להתפלגות הגיאוסיאנית $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

4. משתנים אקראיים תלויים

הגדרה 20: תוחלת מותנת

התוחלת המותנת של משתנה x מעל סיגמה-שדה $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_0$ הוא משתנה אקראי אחר, $Y=\mathbb{E}(x\,|\,\mathcal{F})$ המקיים:

1. $Y\in\mathcal{F}$ (Y מדיד מעל $\mathcal{F}$)
2. $\forall A\in\mathcal{F},\ \int_A xdp=\int_A Ydp$

למה 3:

$\mathbb{E}(x\,|\,\mathcal{F})$ יחיד כמעט בכל מקום.

נסמן $\mathbb{E}[x\,|\,Y]=\mathbb{E}[x\,|\,\sigma(Y)]$

משפט 6: משפט ראדון-ניקודים

קיום תחת תנאים מסוימים.

תכונות:

1. ליניאריות: $\mathbb{E}(aX+bY\,|\,\mathcal{F})=a\mathbb{E}(X\,|\,\mathcal{F})+b\mathbb{E}(Y\,|\,\mathcal{F})$
2. מונוטוניות: $X\le Y\Rightarrow\mathbb{E}(X\,|\,\mathcal{F})\le\mathbb{E}(Y\,|\,\mathcal{F})$
3. אי-שוויון צ'בישב, ג'נסן
4. אם $\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_0$ אז $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{F}_1]\,|\,\mathcal{F}_2\right]=\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{F}_2]$, וכן $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{F}_2]\,|\,\mathcal{F}_1\right]=\mathbb{E}[X\,|\,\mathcal{F}_2]$ (הקטן ביותר הוא הקובע)
5. אם x מדיד לפי $\mathcal{F}$, וכן $X\in\mathcal{F},\ \mathbb{E}[|XY|]<\infty,\ \mathbb{E}[|Y|]<\infty$ אז $\mathbb{E}[XY\,|\,\mathcal{F}]=X\,\mathbb{E}[Y\,|\,\mathcal{F}]$.

5. מרטינגלים

הגדרה 21: פילטר

סדרת סיגמה-שדות $\mathcal{F}_n$, נקראת פילטר אם $\forall n,\ \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$

הגדרה 22: מתואמת לפילטר

סדרת משתנים x_n נקראת מותאמת לפילטר $\mathcal{F}_n$ אם $\forall n,\ x_n \in \mathcal{F}_n$.

הגדרה 23: מרטינגל

סדרת משתנים x_n, המותאמת לפילטר $\mathcal{F}_n$ נקראת מרטינגל אם היא מקיימת:

1. $\forall x,\ \mathbb{E}\left[x_n\right] < \infty$
2. $\forall n,\ \mathbb{E}\left\{x_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right\} = x_n$

הגדרה 24: סופר מרטינגל

סדרת משתנים x_n, המותאמת לפילטר $\mathcal{F}_n$ נקראת סופר מרטינגל אם היא מקיימת:

1. $\forall x,\ \mathbb{E}\left[x_n\right] < \infty$
2. $\forall n,\ \mathbb{E}\left\{x_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right\} \le x_n$

הגדרה 25: סאב מרטינגל

סדרת משתנים x_n, המותאמת לפילטר $\mathcal{F}_n$ נקראת סופר מרטינגל אם היא מקיימת:

1. $\forall x,\ \mathbb{E}\left[x_n\right] < \infty$
2. $\forall n,\ \mathbb{E}\left\{x_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right\} \ge x_n$

הגדרה 26: ניתנת לחיזוי

$\mathcal{F}_n$ היא פילטר. סידרת משתנים H_n נקראת ניתנת לחיזוי אם $\forall_n,\ H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$

הגדרה 27: זמן עצירה

משתנה מיקרי T נקרא זמן עצירה, אם $\forall n,\ \left\{T = n\right\} \in \mathcal{F}_n$.

משפט 7:

אם T הוא זמן עצירה ו- x_n הוא סאב-מרטינגל, אז $x_{\min\{T,x\}}$ הוא סאב-מרטינגל.

משפט 8:

1. אם $x_n > 0$ וסופר-מרטינגל, אז x_n מתכנס לגבי x כמעט בכל מקום.
2. אם x_n הוא סאב-מרטינגל $\sup_n x_n{}^t < \infty$ $Y^t = \max\left\{Y, 0\right\}$ אז x_n מתכנס כמעט בכל מקום ו- $\mathbb{E}\left[x\right] < \infty$.

3. אם x_n הוא מרטינגל ו- $\mathbb{E}\left[\left|x_n\right|^P\right]<\infty$ אז $x_n \to x$ כמעט בכל מקום וב- L^P,
$\mathbb{E}\left[\left|x-x_n\right|^P\right]\to 0$
4. משפט על L' $(P=1)$.

משפט 9: Doob

יהיה x_n סאב-מרטינגל, אז $x_n = M_n + A_n$ כאשר:

1. M_n ו- A_n הם מרטינגלים
2. A_n עולה ($A_{n+1} \ge A_n$) וניתן לחיזוי
3. $A_1 \equiv 0$
4. עבור כל $n \ge 2$, A_n מדיד על $\mathcal{F}_{n-1}$

6. שרשראות מרקוב

הגדרה 28: שרשרת מרקוב

יהיה $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדידה. $\mathcal{F}_n$ פילטר מעל $\mathcal{F}$. סידרת משתנים אקראיים x_n נקראת שרשרת מרקוב אם $\forall B\in\mathcal{F},\ P\left[x_{n+1}\in B \mid \mathcal{F}\right]=P\left[x_{n+1}\in B \mid x_n\right]$ או לפי תוחלות $\mathbb{E}\left[x_{n+1}\mid\mathcal{F}\right]=\mathbb{E}\left[x_{n+1}\mid x_n\right]$

הגדרה 29: שרשרת מרקוב בדידה

שרשרת מרקוב בדידה (דיסקרטית) היא סידרת משתנים אקראיים, x_n, עם קבוצת תוצאות בת מניה, $|\Omega|=|N|$ או $|\Omega|<\infty$, כך ש: $P\left[x_{n+1}=j \mid x_n=i\right]=P_{ij}{}^n$.

הגדרה 30: שרשרת מרקוב סטציונארית

שרשרת מרקוב בדידה היא סטציונארית אם P_{ij}^n קבועה בזמן (לא תלויה בזמן).
$P\left[x_{n+1}=j \mid x_n=i\right]=P_{ij}$

למה 4:

תנאי התחלה, x_0, שהוא משתנה מקרי מעל Ω, ומטריצת המעבר P, מגדירות את כל תהליך מרקוב.

הגדרה 31: קפיצה של *m* צעדים

קפיצה של m צעדים מוגדרת באופן הבא: $P_{ij}^{(m)}=P\left[x_{n+m}=j \mid x_n=i\right]$
היות ו-P מציינת מטריצת מעבר, הרי P^m הוא למעשה העלאה של המטריצה P בחזקת m.

הגדרה 32: מצב נגיש

מצב $j\in\Omega$ נקרא נגיש ממצב $i\in\Omega$ אם $\exists n,\ P_{ij}{}^n>0$.

הגדרה 33: מצבים מתקשרים

שני מצבים, i, j, נקראים מתקשרים אם $i \to j$ ו- $j \to i$. נסמן זאת באופן הבא: $i \leftrightarrow j$.
אם הם לא מתקשרים אז מתקיים $P_{ij}^{m} = 0$ או שמתקיים $P_{ji}^{m} = 0$.

למה 5:

$i \leftrightarrow j$ הינה יחס שקילות. כלומר מתקיים (1) רפלקסיביות (מתקיים $i \leftrightarrow i$), (2) סימטרית (מתקיימים $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow i$) ו-(3) טרנזיטיביות (מתקיים $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$).

הגדרה 34: שרשרת אי-פריקה

שרשרת שבה יש מחלקת קשירות אחת נקראת אי-פריקה.

הגדרה 35: זמן חזרה

אם יש לנו $P_{ii}^{n} > 0$ אז n נקרא זמן חזרה אפשרי של i.

הגדרה 36: מחזור

המחזור של מצב i, $d(i)$, הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של כל זמני החזרה האפשריים.

למה 6:

אם ל-i יש מחזור $d(i)$, אז קיים מספר n כך ש: $\forall n \geq n,\ P_{ii}^{nd(i)} > 0$.

הגדרה 37: שרשרת אי-מחזורית

שרשרת מרקוב שבה לכל המצבים מחזור 1, נקראת שרשרת אי-מחזורית.

הגדרה 38: חזרה ראשונה

חזרה ראשונה: נסמן $f_{ij}^{n} = P\left[x_1 = i \wedge x_2, \ldots, x_{n-1} \neq j \wedge x_n = j\right]$

למה 7:

$f'_{ii} = P_{ii}$, $f^{0}_{ii} = 0$ ל-$n \geq 1$ מתקיים $P_{ii}^{n} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{n} P_{ii}^{n-k}$

הגדרה 39: פונקציה יוצרת

עבור $|s| < 1$, פונקציה יוצרת מוגדרת באופן הבא: $P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{n} s^{n}$

למה 8:

אם $A(s) = \sum A_k s^k$ ו- $B(s) = \sum B_k s^k$ אז $C(s) = A(s)B(s) = \sum C_k s^k$

$$C_k = A_k B_0 + A_{k-1} B_1 + \ldots + A_0 B_k = \sum_{i=0}^{k} A_i B_{k-i} - \sum_{i=0}^{k} A_{k-i} B_k$$

למה 9: אבל

אם $a_k \geq 0$ ו- $\sum a_k < \infty$ (מתכנס) אז $\lim_{s \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \equiv a$

משפט 10:

מצב i הוא חוזר אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{\,n} = \infty$

אם i ו-j מתקשרים ($i \leftrightarrow j$), אז i חוזר אם ורק אם j חוזר.

הגדרה 40: מידה סטציונארית

מידה סטציונארית (נייחת) היא הפתרון של המשוואות $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$. אם יש רק $m < \infty$ מצבים, אז

$$\pi = P_\pi, \pi = \begin{Bmatrix} \pi_1 \\ \dots \\ \pi_m \end{Bmatrix}.$$

למה 10:

אם x_0 מתפלג π, אז $\forall n,\ x_n = \pi$

הגדרה 41: מידה סטציונארית הפיכה

מידה סטציונארית נקראת הפיכה אם $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$

הגדרה 42:

$\mathbb{E}_x[\ ]$ מסמן תחולת על פני כל המסלולים שמתחילים ב-x. $\mathbb{E}_y[\ ]$ מסמן את התוחלת על פני כל המצבים עם התפלגות התחלתית $x_0 = y$.

$$P_x[A] = P[A \mid x_0 = x]$$
$$P_y[A] = P[A \mid x_0 = y]$$

משפט 11:

יהיה ℓ מצב חוזר. $T = \min\{n \geq 1 \mid x_n = \ell\}$, הפעם הראשונה שמגיעים ל-ℓ. נסמן $\pi_\ell = 1$. $\forall k \neq \ell,\ \pi_k = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{T-1} 1_{x_{n=k}}\right]$. π_k הוא מספר הביקורים הממוצע ב-k בזמן $[0, T-1]$, לכן מספר הביקורים הממוצע בזמן $[0, T]$ הוא $\sum_j \pi_j P_{jk} = \pi_k$. $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j P_{j\ell} = 1$.

הגדרה 43: מידה סטציונארית

התפלגות סטציונארית היא מידה סטציונארית, π, המקיימת $\pi_i > 0$ $\sum \pi_i = 1,$.

משפט 12: התכנסות שרשראות מרקוב

תהי x_n שרשרת מרקוב חוזרת (כל המצבים חוזרים), בלתי פריקה (מחלקת קשירות אחת) ואי מחזורית.
תהי π הסתברות סטציונארית, אז לכל מצב i, j מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$

למה 11:

יהיו סדרות $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ כך ש: $a_k, b_k \ge 0$, $a_1 > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ ו-$\sum |b_k < \infty|$. נסמן $\forall k < 0,\ a_k = b_k = 0$. אז (1) קיימת סידרה חסומה $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ המקיימת את משוואת ההתחדשות $\forall n \ge 0,\ u_n - \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u_k = b_n$, (2) $\lim_{n\to\infty}$ קיים וגם (3) $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{k=0}^{\infty} k a_k}$

נסמן T אוסף כל מצבי המעבר, i מצב מעבר ($i \in T$). $\lim_{n\to\infty} P\left[x_n \in T \mid x_o = i\right] = 0$

הגדרה 44: שרשראות מחזוריות

תהי x_n שרשרת מרקוב חוזרת, בלתי פריקה, עם מחזור d אז $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{nd} = \frac{d}{m_i}$.

משפט 13:

יהי j מצב מעבר, אז $P_{ij}^n \to 0$.

$$\pi_j = \sum_k \pi_k P_{kj}$$

$$\pi = P^T \pi$$

משפט 14: משפט ההתחדשות

נתונות סדרות $\{a_k\}, \{b_k\}$, כך ש: $\sum_k b_k < \infty$, $\sum_k a_k = 1,$ $a_k, b_k \ge 0,$.
$\gcd\{k \mid a_k > 0\} = 1$.

נתונה סדרה חסומה $\{u_k\}$ המקיימת את משוואת ההתחדשות $\forall n \ge 0,\ u_n - \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u_k = b_n$ אז

$$\exists \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum_k b_k}{\sum_k k a_k}$$

למה 12:

$\{a_k\},\{y_k\},\{x_k\}$ סדרות המקיימות $a_k \ge 0$, $\sum_k a_k = 1$, $\lim_{k\to\infty} x_k = c$, הסדרה $\{y_k\}$ מקיימת $y_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k$ אז $\lim_{n\to\infty} y_n = c$

משפט 15:

תהי x_n שרשרת מרקוב חוזרת (כל המצבים חוזרים), בלתי פריקה (מחלקת קשירות יחידה) וא-פריודית,

אז $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{\ n} = \frac{1}{\sum_n n f_{ii}^{\ n}} = \frac{1}{m_i}$

$m_i =$ זמן החזרה ל- i

משפט 16:

תהי x_n שרשרת מרקוב חוזרת (כל המצבים חוזרים), בלתי פריקה (מחלקת קשירות יחידה) וא-פריודית,

אז $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{\ n} = \frac{1}{m_j}$

הגדרה 45: חוזרת חיובית

שרשרת מרקוב נקראת חוזרת חיובית אם $\forall j,\ u_j \left(= \frac{1}{m_j} \right) > 0$

משפט 17:

u_j היא התפלגות סטציונארית אם x_n היא שרשרת מרקוב חוזרת חיובית, בלתי פריקה וא-פריודית.

כלומר, $u_j > 0$, $\sum_j u_j = 1$, $u_j = \sum_k u_k P_{kj}$

משפט 18:

u_j היא התפלגות סטציונארית אם x_n היא שרשרת מרקוב חוזרת חיובית, בלתי פריקה וא-פריודית. נניח שמתקיים $\sum_k \pi_k = \sum_k u_k = 1$, $\pi_k, u_k \ge 0$

$$\pi_0 = \sum_k \pi_k P_{kj}$$

$$u_j = \sum_k u_k P_{kj}$$

אז $\forall j,\ \pi_j = u_j$

7. תהליכי פואסון

הגדרה 46: תהליך פואסון

תהליך נקודתי אקראי מעל $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$, הוא סדרת משתנים אקראיים $\{T_n\}$ המקיימים בהסתברות אחת:

1. $T_0 \equiv 0$
2. $\forall k \ge 0,\ t_k < t_{k+1}$
3. $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$

הגדרה 47: זמן המתנה

זמן המתנה $S_n = t_n - t_{n-1}$

הגדרה 48: תהליך ספירה

תהליך ספירה של תהליך נקודתי מעל $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ מוגדר באופן הבא: $N((a,b]) = \sum_{n\ge1} 1_{[a,b]}(t_n)$

מספר האירועים עד זמן t מוגדר באופן הבא: $N(t) = N_t = N(0,t]$

הגדרה 49: תהליך ספירה נקודתי

תהליך פואסון עם קצב $\lambda \ge 0$, הוא תהליך ספירה נקודתי, $N(t)$, המקיים:

1. $\forall k,\ \forall t_1 \overset{\le}{,\dots,} t_k,\quad N(t_i, t_{i+1}] \in$ בלתי תלויים
2. $N(a,b) \sim P[\lambda(b-a)]$, כלומר $P[N(a,b]=m] e^{-\lambda(b-a)} \frac{[\lambda(b-a)]^m}{m!}$

למה 13:

תהליך פואסון הוא נקודתי

למה 14:

הקפיצות של תהליך פואסון הם תהליך נקודות אקראי.

משפט 19:

זמני המתנה, $S_n = t_n - t_{n-1}$, הם בלתי תלויים ומתפלגים אקספוננציאלית עם קצב x, כלומר $P[S_n < t] = 1 - e^{\lambda t}$.

8. שרשראות מרקוב רצופות בזמן

הגדרה 50:

תהליך סטוכסטי מעל (מרחב) קבוצה s, היא משפחת משתנים מיקריים $\{x_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ מעל $\mathbb{E}$. כלומר לכל $t \in [0,\infty)$, x_t הוא משתנה מקרי $\Omega = s$.

ההסתברות של התהליך מוגדרת בעזרת אוסף כל הווקטורים האקראיים הסופיים. כלומר, $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall 0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_k$ נתבונן בווקטור האקראי $\begin{pmatrix} x_{t_1} \\ x_{t_2} \\ \ldots \\ x_{t_k} \end{pmatrix}$ שנקרא ההתפלגות השולית.

הגדרה 51: תהליכים סטוכסטיים שווים

נאמר שתהליך סטוכסטי x_t שווה לתהליך y_t אם $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall 0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_k$ ההתפלגות של $\begin{pmatrix} x_{t_1} \\ x_{t_2} \\ \ldots \\ x_{t_k} \end{pmatrix}$ שווה להתפלגות של $\begin{pmatrix} y_{t_1} \\ y_{t_2} \\ \ldots \\ y_{t_k} \end{pmatrix}$.

הגדרה 52: תהליך הומוגני

אם $P\left[x(s+t) = j \mid x(s) = i\right]$ לא תלוי ב-s, אז התהליך נקרא הומוגני.

למה 15:

1. $P(0) = I$ (כלומר $P_{ij}(0) = d_{ij}$)
2. $P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(s)$ (משוואת Chapman-Kolmogrov)

$P(t)$ נקראת אגודת מעבר

הגדרה 53:

נסמן μ_0 הסתברות התחלתית (מדידה על s). נסמן μ_t הסתברות בזמן t (מדידה על s). אם μ_t הוא וקטור עמודה, אז $\mu_t^T = \mu_0^T P(t)$, וכן $\mu_t = P^T(t)\mu_0$.

הגדרה 54: תהליך מרקוב אחיד

תהליך מרקוב אחיד הוא תהליך מרקוב הניתן ע"י $x_t = x_{N(t)}$, כאשר $N(t)$ הוא תהליך פואסון ו-x_n הוא שרשרת מרקוב (בדידה). x_n נקרא השלד של x_t. $N(t)$ נקרא השעון של x_t.

הגדרה 55:

חבורה למחצה $P(t)$ נקראת רציפה ב-t אם $\lim_{h \to 0^+} P[t+h] = P[t]$.

משפט 20:

הגבולות הבאים קיימים:

1. $q_i = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-P_{ii}[h]}{h} \in [0,\infty)$
2. $q_{ij} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-P_{ij}[h]}{h} \in [0,\infty)$
3. $A = Q = \lim_{h\to 0^+} \frac{P[h]-P[0]}{h} = P'(0)$

Q נקרא היוצר האופייני של התהליך (אופרטור אופייני)

הגדרה 56: תהליך יציב ותהליך שומר/משמר

אם $\forall i,\ q_i < \infty$, התהליך נקרא יציב

אם $\forall i,\ q_i = \sum_{i\neq j} q_{ij}$, התהליך נקרא שומר/משמר

הגדרה 57: משוואה קדמית ומשוואה אחורית של קולמגורוב

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \frac{P(t)P(h)-P(t)}{h} = P(t)\frac{P(h)-I}{h} = \frac{P(h)P(t)-P(t)}{h} = \frac{P(h)-I}{h}P(t)$$

אם ניתן לקחת את הגבול, נקבל:

משוואה אחורית: $\frac{d}{dt}P(t) = QP(t)$

משוואה קדמית: $\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q$

$$\frac{dP^T}{dt} = P^T Q^T$$

משפט 21:

1. למשוואה האחורית של תהליך מרקוב יציב ומשומר קיים פתרון יחיד.
2. למשוואה הקדמית של תהליך מרקוב יציב ושומר המקיים $\sum_k P_{ik}(t) q_k < \infty$ יש פתרון יחיד.

משפט 22:

אם המשוואה האחורית מתקיימת, וגם $\sum_i q_i \mu_i(t) < \infty$, אז $\frac{d}{dt}\mu^T(t) = \mu^T(t) Q$.

הגדרה 58: התפלגות סטציונארית

התפלגות סטציונארית, π, של תהליך, היא התפלגות, π, המקיימת $\pi^T P(t) = \pi^T$

או $Q^T \pi = 0$ או $\pi^T Q = 0$

הגדרה 59: תכונת מרקוב

נתון זמן $t \ge 0$. נגדיר את התהליך אחרי זמן t באופן הבא: $\left\{x\left(t+\tau\right)\right\}_{\tau>0}$. נגדיר את התהליך לפני זמן t באופן הבא: $\left\{x\left(\min\left(t,\tau\right)\right)\right\}_{\tau>0}$

משפט 23:

תהליך מרכוב מקיים את תכונת מרקוב

1. תהליכים לפני ואחרי t הם בלתי תלויים
2. תהליכים אחרי t הם תהליך מרקוב

הגדרה 60: זמן עצירה

משתנה מקרי τ נקרא זמן עצירה לתהליך x_t אם $\left\{\tau \le t\right\} \in \sigma\left(x_t\right)$. (הגדרת הספר: $\left\{\tau \le t\right\} \in {x^t}_0$)

הגדרה 61: תכונת מרקוב חזקה

יהיה τ זמן עצירה לתהליך x_t

התהליך אחרי τ: $\left\{x_{t+\tau}\right\}_{t\ge0}$

התהליך לפני τ: $\left\{x_{\min(t,\tau)}\right\}_{t\ge0}$

התהליכים לפני ואחרי הם בלתי תלויים. התהליך אחרי τ הוא תהליך מרקוב.

למה 16:

כל תהליך מרקוב מקיים את תכונת מרקוב החזקה

הגדרה 62: שרשראות טמונות

יהי x_t תהליך מרקוב (שומר ויציב) עם קבוצת מצבים בת מניה s. נסמן את זמני המעבר $\left\{t_n\right\}_{n=0}^{\infty}$. אם מספר הזמנים סופי (m) אז נסמן $\forall n>m,\ t_n=\infty$. יהי Δ, $\Delta \notin S$. $S_\Delta = S \cup \left\{\Delta\right\}$.

השרשרת הטמונה ב- x_n היא
$$x_n = \begin{cases} x\left(t_n\right) & t_n < \infty \\ \Delta & otherwise \end{cases}$$

נסמן $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ (זמן המתנה). $\left\{\tau_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ הם בלתי תלויים (תכונת מרקוב חזקה) ו- $\tau_n \sim \exp\left(\lambda_i\right)$ כאשר $x_{t_{n-1}} = i$.

τ_i מתפלג אקספוננציאלית עם קצב שתלוי ב- x_0 וכו'.

יהי x_t תהליך מרקוב, אז קיימת שרשרת אחידה $x_t = Y_{N_t}$.

התנהגות אסימפטוטית

נניח $x_t = x_{N_t}$.

תהליך מרקוב x_{N_t} נקרא בלתי פריק אם x_n שרשרת מרקוב בלתי פריקה (קבוצת קשירות אחת).

הגדרה 63: תהליך חוזר

תהליך מרקוב נקרא חוזר אם x_n חוזר. $P_i\left[\exists j>0, x_j=i\right]=1$

הגדרה 64: מצב חוזר

מצב i נקרא חוזר חיובי עם $\mathbb{E}_i\left[R_i\right]<\infty$, כאשר R_i הוא זמן חזרה $R_i=\min_{j\geq 1} x_j=i$

הגדרה 65: מידה סטציונארית

u נקראת מידה סטציונארית אם $u\neq 0$, $u^T P(t)=u^T$

משפט 24:

לתהליך מרקוב עם יוצר Q שהוא בלתי פריק וחוזר, מתקיימת מידה סטציונארית יחידה (עד כדי מכפלה בקבוע).

$$u_i=\mathbb{E}\left[\int_0^{R_k} 1_{x_S=i}\, ds\right]$$

זמן בריחה מ-i: $E_i=\inf_{t\geq 0}\left\{x_t\neq i\right\}$

זמן חזרה ל-i: $R_i=\inf_{t>E_i}\left\{x_t=i\right\}$

יחידות

יודעים $u^T Q=0$. $Q=\lambda\left(k-I\right)$.

כאשר k מטריצת המעבר של x_n.

$$0=u^t Q=u^t\lambda\left(k-I\right)$$

$$u^T k=u^T.$$

כלומר, u הוא מידה סטציונארית של x_n, ולהיפך. לכן יחידות של u עבור x_n גוררת יחידות של u עבור x_t.

משפט 25:

המצבים בתהליך חוזר ופריק הם חוזרים וחיוביים אם ורק אם $\sum_i u_i<\infty$, ואז $\pi_i=\frac{1}{\mathbb{E}_i\left[R_i\right]}$ (התפלגות סטציונארית).

הגדרה 66: ארגודי

תהליך מרקוב בלתי פריק, חוזר וחיובי נקרא ארגודי.

ואז: אם נתונה פונקציה $f:S\to\mathbb{R}$, אז $\lim_{f\to\infty}\frac{1}{f}\int_0^T f\left(x_t\right)dt=\sum_{i\in S} f\left(i\right)\pi_i$.

משפט 26:

אם x_t תהליך ארגודי עם חבורת מעבר $P\left(t\right)$ בהתפלגות סטציונארית π, אז $\lim_{t\to\infty} P_{ij}\left(t\right)=\pi_j$.

הגדרה 67:

נאמר שתהליך מקיים detailed balance אם $\pi_i q_{ij} = \pi_j P_{ji}$

9. תנועה בראונית

זהו נושא מאד גדול, אנו בעיקר נעסוק בהגדרות.

הגדרה 68: תנועה בראונית

תנועה בראונית (BM), $\{B_t\}_{t\geq 0}$, הוא תהליך סטוכסטי המקיים:

1. גידולים בלתי תלויים, לכל $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ המשתנים $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ הם בלתי תלויים.
2. $\forall s,t \geq 0,\ \ B_{s-t} - B_s \sim N(0,t)$
3. בהסתברות 1 הפונקציה $t \to B_t$ היא רציפה. כלומר, אם נגריל במקביל את כל המספרים האקראיים, B_t, נקבל פונקציה רציפה של B_t כפונקציה של t.

משפט 27: קולמגורוב

קיימת BM והיא יחידה. יחידה, כאשר שוויון הוא שכל ההתפלגויות השוליות שוות עבור מס' סופי של זמנים סופיים, ושוויון תהליכים סטוכסטיים.

הגדרה 69: תנועה בראונית, הגדרה שניה

תנועה בראונית, $\{B_t\}_{t\geq 0}$, הוא תהליך סטוכסטי המקיים ($B_0 = 0$):

1. B_t הוא תהליך גאוסיאני (תהליך שההתפלגויות השוליות שלו הן גאוסיאניות).

$$\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \ldots \\ B_{t_n} \end{pmatrix} \sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{\mu})\sum^{-1}(\bar{x}-\bar{\mu})}.$$

עבור מטריצת covariance: $\Sigma_{ij} = \mathbb{E}x_{t_i}x_{t_j} - \mathbb{E}x_{t_i}\mathbb{E}x_{t_j}$

2. $\bar{\mu} = 0$, $\mathbb{E}(B_t B_s) = \min(t,s)$ (מטריצת השונות)
3. בהסתברות 1 הפונקציה $t \to B_t$ היא רציפה.

משפט 28:

בהסתברות 1 המסלולים של BM לא גזירים באף t.

הגדרה 70: רציפות לפי ליפשיץ

נקודה $f(x)$ נקראת רציפה לפי ליפשיץ אם $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ $\exists k > 0,\ \ \forall x,y$

רציפה לפי ליפשיץ -> רציפה בכל נקודה
נגזרת חסומה -> רציפה לפי ליפשיץ (כי אפשר לחלץ את k מהנגזרת הכי גדולה)

משפט 29:

בהסתברות 1, המסלולים של תנועה בראונית אינם רציפים ליפשיץ באף נקודה (כלומר לכל x ולכל k קיים y כך שהתנאי לא מתקיים).
כלומר אפשר להגיד שאם f גזירה ב-x, אז f רציפה ליפשיץ ב-x.

הגדרה 71: רציפה לפי הולדר

פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה לפי הולדר עם פרמטר $0 \le \alpha \le 1$ אם

$$\exists c > 0,\ \forall x, y,\ \left|f(x) - f(y)\right| \le c|x-y|^{\alpha}$$

$\alpha = 1$ ליפשיץ
$\alpha = 0$ חסומה
$\alpha > 0$ רציפה
$\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ רציפות α_1 גוררת רציפות α_2

משפט 30:

תנועה בראונית אינה רציפה הולדר עם $\alpha = \frac{1}{2}$

משפט 31:

תנועה בראונית רציפה הולדר לכל $\alpha < \frac{1}{2}$

הגדרה 72: אירועים אין סופיים

תהי A_n סידרת קבוצות / אירועים. נסמן את קבוצת האירועים שקורים אין-סוף פעמים (infinity (often $\{A i.o.\} = \{\omega \mid \forall m, \exists m > M, \omega \in A_m\}$

למה 17: בורל-קנטלי

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left[\{A i.o.\}\right] = 0$$

הגדרה 73:

לכל n, נגדיר 2^n משתנים אקראיים בלתי תלויים המתפלגים גאוסיאנית עם ממוצע 0 וסטיית תקן 2^{-n} באופן הבא:
נסמן $U_{1,0} \sim N(0,1)$
יהיו $\{v_{m,n}\}_{1<m\le 2^n}$ אוסף של משתנים אקראיים בלתי תלויים עם התפלגות $N(0, 2^{-n})$.
נסמן $\frac{1}{2}\left(U_{m,n} + V_{m,n}\right) = U_{2m-1,n+1}$
$U_{2m,n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{m,n} - V_{m-1,n}\right)$

הגדרה 74: תנועה בראונית כגבול של הולך אקראי

נסמן $\{x_n\}_{n\geq 1}$ משתנים אקראיים בלתי תלויים $P[x_n=\pm 1]=\frac{1}{2}$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$. הולך אקראי על $\mathbb{Z}$
נגדיר $B_t^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}S_{\lfloor nt\rfloor}$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\sup\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq k\}=floor(x)$

משפט 32:

$B_t^{(n)}$ מתכנס לתנועה בראונית. כל ההתפלגויות השוליות מתכנסות באופן חלש.

הגדרה 75:

תנועה בראונית כטור הרמוני אקראי
יהיו $\{\xi_k\}_{k=0,1,\dots}$ בלתי תלויים ומתפלגים נורמאלית $N(0,1)$.

$$B_t=\xi_0 t+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\xi_k\sqrt{2}\frac{\sin\pi kt}{\pi k}$$

משפט 33:

B_t היא תנועה בראונית

$$\mathbb{E}B_t=0$$

$$\mathbb{E}B_tB_s=\min(t,s)$$