אלגברה ליניארית

אלגברה לינארית היא ענף של האלגברה העוסק בחקר התכונות של וקטורים, מרחבים וקטוריים (או באופן יותר כללי מודולים), מטריצות, העתקות לינאריות ומערכות של משוואות לינאריות. מרחבים וקטוריים הם נושא מרכזי במתמטיקה, ולכן נעשה שימוש נרחב באלגברה לינארית במסגרת האלגברה המופשטת, האנליזה הפונקציונלית והגאומטריה האנליטית. כמו כן נעשה שימוש באלגברה לינארית במסגרת מדעי החברה ומדעי הטבע.

מערכת משוואות ליניאריות

מערכת משוואות ליניארית בעלת פתרון נקראת מערכת קונסיסטנטית.

מטריצות ושימושיהן בפתרון משוואות לינאריות

מטריצה: טבלה עם m שורות ו-n עמודות. אם m ו-n שווים אז זאת מטריצה ריבועית, אחרת מלבנית. אם נוסיף את המקדמים של התוצאות היא נקראת מוגדלת.

* פעולות אלמנטריות על שורות מטריצה:
1. שינוי קנה מידה, ע"י הכפלה בסקלר (שונה מ-0).
2. הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת.
3. החלפת שורות.

שתי מטריצות נקראות שקולות לפי שורות אם ניתן לקבל מטריצה אחת מהשנייה בעזרת פעולות אלמנטריות (פעולות אלמנטריות הן הפוכות).

* שקילות של מערכת משוואות:
שתי מערכות משוואות לינאריות נקראות שקולות כאשר יש להן אותו סט של פתרונות.

מטריצה מדורגת ומדורגת מוקטנת

שורה נקראת שונה מ-0 כאשר יש בה אלמנט אחד לפחות ששונה מ-0, אותו הדבר לגבי עמודה.
האלמנט הכי שמאלי שבין השונים מ-0 נקרא מוביל השורה.

במטריצה מדורגת מתקיימים התנאים הבאים:
1. כל השורות השונות מ-0 מעל השורות השווה ל-0.
2. בכל שורה המוביל נמצא בעמודה ימנית יותר ביחס למוביל של השורה הקודמת.
3. בכל עמודה כל האלמנטים תחת המוביל שווים ל-0.

מטריצה מדורגת מוקטנת: מטריצה מדורגת שכל המובילים שווים ל-1, ובכל עמודת מוביל שאר האלמנטים שווים ל-0.
כל מטריצה שקולה למטריצה מדורגת מוקטנת ורק אחת.

פתרונות כללים של ממ"ל

המשתנים התואמים למובילים נקראים משתנים יסודיים, כל המשתנים האחרים נקראים חופשיים.
ערך של משתנה חופשי הוא לפי בחירה שלנו (חופשי).
פתרון ניקרא כללי אם הוא מתאר את הפתרונות.

משפט קיום ביחידות:
1. אם במטריצה מדורגת של ממ"ל יש שורה או כמה שורות מהצורה: $b \dots 0\ 0\ 0$, ו-b שונה מ-0, אז אין פתרונות.
2. אם אין שורות כאלה, אז ממ"ל קונסיסטנטית, ויש שתי אפשרויות. האחת: אם אין משתנים חופשים אז יש רק פתרון אחד בלבד. השניה: אם יש משתנים חופשיים אז יש אין-סוף פתרונות.

מרחבים וקטוריים

קבוצה V נקראת מרחב וקטורי כאשר לכל אלמנט ב-V, מוגדרות שתי פעולות (חיבור וקטורים, וכפל וקטור בסקלר). ולשתי הפעולות האלה מתקיימים עשרת הכללים הבאים:
(u, v, w וקטורים c, d סקלרים)
1. $u + v$ שייכים ל-V
2. $u + v = v + u$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. קיים אלמנט 0, $u + 0 = u$
5. לכל u קיים v כל ש: $u + v = 0$, v מסומן כ$-u$, וקטור זה ניקרא נגדי
6. cu שייך ל-V
7. $c(u + v) = cu + cv$
8. $c(du) = (cd)u$
9. $(c + d)u = cu + du$
10. $1u = u$

תת-מרחב

תת-קבוצה H של V, נקראת תת-מרחב אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. 0 שייך ל-H
2. $u + v$ שייך ל-H
3. cu שייך ל-H

$Null\ Space$

$Null\ Space$ של מטריצה A היא קבוצת כל הפתרונות של המערכת $Ax = 0$. אם יש n עמודות אז הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

$Col\ A$ ו-$Row\ A$

מרחב העמודות ($Col\ A$) של מטריצה A הוא קבוצת כל הצרופים הליניאריים של עמודות המטריצה, ובהתאמה, מרחב השורות ($Row\ A$) הוא קבוצת כל הצרופים הליניאריים של שורות המטריצה.
(קבוצת צרופים ליניאריים ראה $SPAN$).

$Row\ A = Col\ A^T$

בסיס של מרחב וקטורי

אם H תת-מרחב וקטורי, אז קבוצת וקטורים נקראת בסיס של H אם היא בלתי תלויה לינארית, והיא פורשת את כל H.

מציאת בסיס של $Null\ Space$: יש לדרגת את המטריצה, ולמצוא פתרון כללי של המערכת. אח"כ יש לכתוב את הפתרון הכללי בצורת וקטורים, ובסוף יש להוציא את המשתנים מהווקטורים. כך מקבלים מס' וקטורים בלתי תלויים. מספר המשתנים החופשיים שווה למספר הווקטורים בבסיס.

בסיס של $Col\ A$: עושים שיטת גאוס על המטריצה, העמודות שבהן מקבלים מוביל הן עמודות הבסיס.

בסיס של $Row\ A$: נדרג את המטריצה, השורות השונות מ-0 הן הבסיס של המטריצה.

מערכת קורדינטות

נניח ש-B קבוצת וקטורים המהווה בסיס של המרחב הווקטורי V. קיימת קבוצת סקלרים אחת כך ש: $c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_nb_n = x$. המקדמים בסקלרים האלה (ה C-ים) נקראים קורדינטות של x בבסיס B, ומסמנים את זה כך: $[\vec{X}]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

ממד של תת-מרחב וגרדה של מטריצה.

ממד זה מספר הווקטורים בבסיס. ממד של $\{0\}$ זה לפי הגדרה 0. במרחב $\mathbb{R}^n$ בבסיס יש n וקטורים. אם H תת-מרחב של V אז $dimH \le dimV$.

דרגת מטריצה A היא ממד של $Row\ A$.

$Rank\ A\ =\ Dim\ Col\ A$

וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

נניח ש-A מטריצה ריבועית n על n. הווקטור $\vec{x}$ שונה מ-0, נקרא הווקטור העצמי, כאשר $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, והסקלר λ נקרא הערך העצמי. לכל מערכת לינארית יכול להיות עד n וקטור עצמיים שונים ו-n ערכים עצמיים שונים.

וקטורים

וקטורים שווים: שני וקטורים נקראים שווים, כאשר מקדמיהם התואמים שווים.

חיבור וקטורים:

אם A וקטור $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$, ו-$B$ וקטור $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$, אז: $A + B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$

כפל וקטור בסקלר:

אם A וקטור $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$, ו-$b$ סקלר, אז: $A \cdot b = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b \\ a_2 \cdot b \\ \cdots \\ a_n \cdot b \end{bmatrix}$

תכונות חיבור וקטורים וכפל וקטורים בסקלר:

אם A, B ו-C הם וקטורים ו-n, m הם סקלרים:

$A+B = B+A$ קומוטטיביות של חיבור
$A+(B+C) = (A+B)+C$ אסוציאטיביות של חיבור
$m(nA) = (mn)A = n(mA)$ אסוציאטיביות של כפל בסקלר
$(m+n)A = mA+nA$
$m(A+B) = mA+mB$
$A+0=A$
$A+(-A)=0$

כפל וקטורים כסקלרים:

בהינתן שני ווקטורים A ו-B, המכפלה הסקלרית שלהם מוגדרת כ:

$$A\cdot B = \|A\|\cdot\|B\|\cdot cos(\alpha)$$

כאשר $\|A\|$ הוא אורך הווקטור A, $\|B\|$ הוא אורך הווקטור B ו-α היא הזווית שבין שני הווקטורים.

$A\cdot B = B\cdot A$ קומוטטיביות

$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$(kA)\cdot B = k(A\cdot B)$

$\mathrm{A}\cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ כאשר $A = A_1i + A_2j + A_3k$ ו-$B = B_1i + B_2j + B_3k$

כפל וקטורים כווקטורים:

בהינתן שני ווקטורים A ו-B, המכפלה הווקטורית שלהם מוגדרת כ:

$$A\times B = \hat{n}\cdot\|A\|\cdot\|B\|\cdot sin(\alpha)$$

כאשר $\|A\|$ הוא אורך הווקטור A, $\|B\|$ הוא אורך הווקטור B, α היא הזווית שבין שני הווקטורים, ו-$\hat{n}$ הוא וקטור יחידה, שמאונך למישור הנקבע על ידי שני הווקטורים.

אם הזווית, α, שונה מ-0 או מ-180 אז קיים מישור אחד בלבד, דרך הווקטורים A ו-B.

עבור שני ווקטורים A ו-B מ-$\mathbb{R}^3$, המכפלה הווקטורית שלהם היא:

$$A\times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & b_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2)i + (A_3B_1 - A_1B_3)j + (A_1B_2 - A_2B_1)k$$

A ו-B שונים מ-0. $B \parallel A$ אם ורק אם $\mathrm{A}\times B = 0$.

$$A \times B = -B \times A$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) + (A \times C)$$

$|A \times B|$ שטח המקבילית שצלעותיה הן A ו-B והזווית α ביניהם.

$C = A \times B \Leftarrow C$ אורתוגונלי גם ל-A וגם ל-B

מכפלה משולשת (מעורבת):

יהי A, B וקטורים, $0 \leq \alpha \leq \pi$ $A \times B = ABsin\alpha$, כאשר α היא הזווית שבין A ל-B. אם הזווית שונה מ-0 או מ-180 אז קיים מישור אחד בלבד, דרך הווקטורים A ו-B.

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2$$

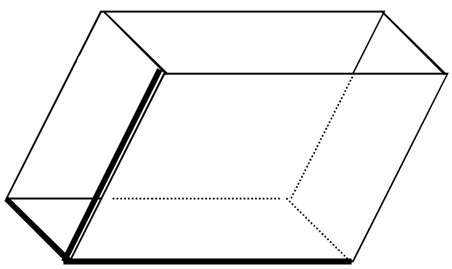
$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \times B)$$

$$(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - A(B \cdot C)$$

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot B)(B \cdot C)$$

$$(A \times B) \times (C \times D) = C\{A \cdot (B \times D)\} - D\{A \cdot (B \times C)\} = B\{A \cdot (C \times D)\} - A\{B \cdot (C \times D)\}$$

$|A \cdot (B \times C)|$ נפח המקבילון עם צדדים A, B ו-C.



מקבילון:

צרוף ליניארי

אם U הוא וקטור, וכן $V_1, V_2, \ldots, V_n$ הם וקטורים, וקיימים מקדמים $C_1, C_2, \ldots, C_n$ המקיימים: $U = C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n$ אזי U הוא **צרוף ליניארי**.

תלות ליניארית:

הווקטורים $V_1, V_2, \dots, V_n$ תלויים ליניארית אם קיימים מקדמים $C_1, C_2, \dots, C_n$, אשר לא כולם שווים ל-0, המקיימים: $C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n = 0$.
אם יש רק פתרון טריוויאלי אז הווקטורים **לא** תלויים ליניארית, אחרת הם **כן** תלויים ליניארית. אם במערכת יש וקטור אחד ששווה ל-0 אז המערכת תלויה ליניארית. אם בקבוצה אין-סופית קיימים n וקטורים שהם תלויים ליניארית אז הקבוצה תלויה ליניארית.

וקטורים אורתוגונליים:

וקטורים נקראים **אורתוגונליים** (או **ניצבים** או **מאונכים**) אם מכפלתם כווקטורים היא 0, כלומר, אם $A \cdot B = 0$ (לפי הגדרת כפל וקטורים כסקלרים אנו רואים שאכן הזווית בניהם שווה ל-90 ואז הקוסינוס שווה ל-0).

אורך של וקטור:

נתונים הווקטורים $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$ ו- $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$.

אורך הווקטור $\vec{A}$ מוגדר כך: $\|\vec{A}\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

אורך הווקטור $\overrightarrow{AB}$ הוא: $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$

וקטור יחידה:

וקטור שהאורך שלו שווה ל-1 נקרא וקטור יחידה, והוא מוגדר כך:

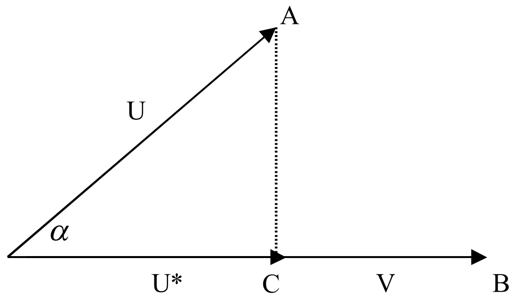
$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

היטלים:

יהיו U ו-V וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$. וקטור ההיטל של U על V הוא הווקטור: $proj(U, V) = \frac{U \cdot V}{\|V\|^2} V$

נחשב היטל של הווקטור U ונקרא לו U^*. כדי לקבל את U^* נכפיל את גודל הוקטור U בוקטור היחידה בכיוון של V (וקטור היחידה של V). ואז נקבל:

$$U^* = \|U^*\| \frac{V}{\|V\|} = \frac{U \cdot V}{\|V\|^2} V$$



$SPAN$

$\boldsymbol{SPAN}$ הוא מרחב הנוצר ע"י שני וקטורים (או יותר, אבל תמיד אפשר להתייחס רק לשניים), בתנאי שהם לא מקבילים. כל וקטור ששייך למרחב הזה, הוא צרוף ליניארי של הווקטורים שיוצרים את ה-$SPAN$.
ניתן להגדיר את $SPAN$ גם כקבוצת כל הצרופים הליניאריים שנוצרים ע"י שני וקטורים (או יותר). $SPAN$ הוא תת-מרחב ווקטורי.

מרחבים ב-$\mathbb{R}^2$

לכל נקודה במישור תואם וקטור ולהפך.

משוואת הישר: $Ax + By = C$

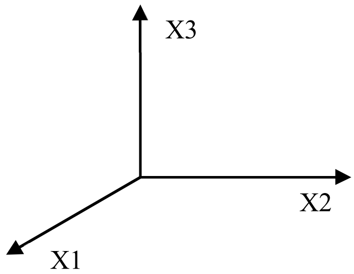
וקטור כיוון: וקטור שעובר דרך הנקודה (0,0), במקרה זה B במשוואת הישר שווה ל-0.
$\vec{u} = \begin{bmatrix} -B \\ A \end{bmatrix}$

וקטורים מקבילים: וקטורים נקראים מקבילים אם אחד שונה לשני שמוכפל בסקלר שונה מ-0, והם שונים מ-0.

נורמל: $\vec{u} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

מרחבים ב-$\mathbb{R}^3$

משוואת המרחב: $Ax + By + Cz = D$



מערכות צירים ב-$\mathbb{R}^3$:

אם נתון לנו ש-x שווה לערך מסוים זה מקטין את המרחב ל-$\mathbb{R}^2$ (או $\mathbb{R}^1$ אם נתונה עוד נקודה וכדומה ב-$\mathbb{R}^n$), כאשר $\mathbb{R}^2$ נחתך בנקודה x.

כדי למצוא מישור העובר דרך נקודה C ומאונך לווקטור V, $x - c \perp v$, נחשב לפי הנוסחה הבאה: $(x - c, v) = (x_1 - c_1)v_1 + (x_2 - c_2)v_2 + (x_3 - c_3)v_3 = 0$

מטריצות

מטריצה עם m שורות ו-n עמודות נקראת מטריצה m על n או, מטריצה מסדר $m \times n$.
מטריצות שוות אם יש להן אותה צורה ואם הרכיבים המתאימים שווים זה לזה. בעלת שורה אחת נקראת **וקטור שורה** ומטריצה בעלת עמודה אחת נקראת **וקטור עמודה**.

חיבור מטריצות וכפל בסקלר:

תהיינה A ו-B שתי מטריצות מאותו סדר, כלומר בעלי מספר שורות ומספר עמודות זהה.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

התכונות שמתאימות לחיבור וקטורים וכפל וקטורים בסקלרים מתאימות גם למטריצות (ניתן לראות וקטורים כמטריצה של עמודה/שורה אחת).
סיכום תכונות של חיבור מטריצות וכפל בסקלר כל שהוא:

$A + B = B + A$
$(A + B) + C = A + (B + C)$
$A + 0 = A$

$k(A+B)=kA+kB$
$(k+l)A=kA+lA$
$(kl)A=k(lA)$

כפל מטריצות:

נגדיר תחילה כפל מטריצה בווקטור, $A\vec{x}=\vec{b}$ כך (כאשר מספר האיברים בווקטור b שווה למספר הטורים במטריצה A):

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \dots & \dots & \dots \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+yb+zc \\ x\dots+y\dots+z\dots \\ xd+ye+zf \end{bmatrix}$$

ובצורה כללית:

$$[\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a_{11}+x_1a_{21}+\cdots+x_1a_{n1} \\ x_2a_{12}+x_2a_{22}+\cdots+x_2a_{n2} \\ \dots \\ x_la_{1m}+x_la_{2m}+\cdots+x_la_{nm} \end{bmatrix}$$

כאשר כל טור במטריצה ניתן לראות כווקטור.

לפי זה נגדיר הכפלה של מטריצה במטריצה בצורה כללית באופן הבא:

$$A\cdot[b_1\ b_2 \dots b_n]=[Ab_1\ Ab_2 \dots Ab_n]$$

כדי שנוכל לכפול מטריצה במטריצה, מספר העמודות של מטריצה A צריך להיות שווה למספר השורות במטריצה B.
בד"כ $AB \neq BA$

סיכום תכונות של כפל מטריצות:

$(AB)C=A(BC)$
$A(B+C)=AB+AC$
$(B+C)A=BA+CA$
$k(AB)=kAB$
$InA=AIm=A$

מטריצה משוחלפת:

שחלוף (Transpose) היא פעולת ההחלפה בין השורות והעמודות של מטריצה נתונה. הפעולה מקבלת מטריצה מסדר $n\times m$, ומחזירה מטריצה מסדר $m\times n$, שבמקום ה-(i,j) שלה נמצא האיבר ה-(j,i) של המטריצה המקורית. מטריצה ריבועית שפעולת השחלוף אינה משנה אותה נקראת מטריצה סימטרית.

פורמאלית, תהא A מטריצה מסדר $n\times m$, המטריצה המשוחלפת שלה, A^T (מקובלים גם הסימונים A^t, $A^{\intercal}$, A^{tr}, A') היא מטריצה מסדר $m\times n$ שמוגדרת כך: $(A^T)_{ij}=A_{ji}$ עבור כל $1\le i\le m, 1\le j\le n$.

לדוגמא:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

תכונות של מטריצות משוחלפות:

$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(A^T)^T = A$
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$
$(AB)^T = B^T A^T$

מטריצות כפונקציות וטרנספורמציות ליניאריות:

תהי A מטריצה כלשהי, ניתן לראות את A כפונקציה $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. פונקציה נקראת טרנספורמציה ליניארית, כל מטריצה מגדירה טרנספורמציה ליניארית.
טרנספורמציה ליניארית מקיימת את התנאים הבאים (נשתמש בטרנספורמציה המוגדרת למעלה):

$$A(v+w) = A(v) + A(w)$$
$$A(kv) = kA(v)$$

נניח ש-T טרנספורמציה ליניארית מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$, אם קיימת מטריצה אחת בלבד ש-$T(x) = Ax$, מטריצה A היא מטריצת יחידה ($\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\0 & & 1\end{bmatrix}$), כאשר נסמן כל עמודה במטריצת היחידה ב-e עם אינדקס העמודה, ואז נקבל $A = [T(e_1)\ T(e_2) \ldots T(e_n)]$..
מכאן יש 3 עובדות:

1. קיימת מטריצה, ואת כל הטרנספורמציות ניתן להציג באמצעות מטריצה.
2. קיימת מטריצה אחת בלבד לכל טרנספורמציה.
3. אנו יודעים איך לבנות את המטריצה.

מטריצות הפיכות:

מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה (רגולרית) אם קיימת מטריצה B כך ש: $AB = BA = I$.
למטריצה B קוראים ההופכית של A, ומסמנים אותה כ-A^{-1}, היחס הזה הוא סימטרי, אם B היא ההופכית של A, אז A היא ההופכית של B.

למטריצה 2 על 2 ההופכית היא:

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$$

כדי לקבל מטריצה הופכית נכתוב את שתי המטריצות A ו-I כך: $[AI]$, נדרג את המטריצה עד שנקבל $[IB]$, ואז B היא ההופכית.

דוגמא:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$AI=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

יש להדגיש שלא כל המטריצות הינן הפיכות, אך אם קיימת מטריצה הופכית אז היא אחת בלבד.

תכונות של מטריצות הופכיות:

$(A^{-1})^{-1}=A$
$A^{-3}=A^{-1}A^{-1}A^{-1}$
$((A^{-1})^{-1})^{-1}=A^{-1}$
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

משפט על מטריצה הפוכה:
נניח ש-A מטריצה עם m שורות ו-n עמודות, המשפטים הבאים שקולים:

1. A מטריצה הפיכה
2. A שקולה למטריצת יחידה
3. A שווה למכפלה במטריצות אלמנטריות
4. למשוואה $Ax=0$ יש רק פתרון טריוויאלי
5. למשוואה $Ax=b$ יש פתרון לכל b מ-$\mathbb{R}^n$
6. קימת מטריצה C כך ש: $AC=I$
7. קיימת מטריצה D כך ש: $DA=I$
8. A^T הפיכה
9. העמודות של A הן בסיס ב-$\mathbb{R}^n$
10. $Col\ A$ שווה ל-$\mathbb{R}^n$
11. $Dim\ Col\ A=n$
12. $Rank\ A=n$
13. $Nul\ A=\{0\}$
14. $Dim\ Nul\ A=0$

מטריצות אלמנטריות:

מטריצה אלמנטרית היא מטריצה שמקבלים כאשר מבצעים על מטריצת יחידה פעולה אלמנטרית אחת בלבד.
כפל במטריצה אלמנטרית גורם לאותה הפעולה שנעשתה על המטריצה האלמנטרית.
שיטת גאוס זה כפל המטריצות אלמנטריות, וזה שווה למכפלה במטריצה מסוימת.

לכל למטריצה אלמנטרית יש מטריצה הופכית.

דטרמיננטות:

דטרמיננטה הינו סקלר הניתן לחישוב עבור מטריצות ריבועיות בלבד. הדטרמיננטה של המטריצה A מסומנת כ-$|A|$ או $\det(A)$.

אחת מהשיטות לחישוב דטרמיננטות נקראת פיתוח לפי מינורים. שיטה זו הינה רקורסיבית, ומתבססת על כך שעבור מטריצה A מסדר 1×1, ערך הדטרמיננטה שווה לערך הנמצא בתא a_{11}. מינור הוא המטריצה המתקבלת ממטריצה A לאחר מחיקת מספר שווה של שורות ועמודות. את המינור המתקבל ממטריצה A לאחר מחיקת שורה i ועמודה j מסמנים כ-A_{ij}.

הקופקטור, C_{ij}, הינו הדטרמיננטה של המינור A_{ij}, המוכפל ב-$(-1)^{i+j}$, כלומר $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

את הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית A מסדר $n \times n$, כאשר n גדול מ-1, ניתן לחשב ע"י פיתוח למינורים ושימוש בקופקטורים בעזרת הנוסחאות הרקורסיבית הבאות:

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ (פיתוח לפי עמודה) או $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ (פיתוח לפי שורה)

בהתאם לכך, את הדטרמיננטה של המטריצה הריבועית A (מסדר $n \times n$) אנו יכולים ניתן לחשב באופן הבא:

$$a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \cdot \det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \det(A_{1n})$$

בחישוב זה השורה נשארת קבועה (שורה 1) ואילו העמודה משתנה לאורך החישוב.

בהתאם לנוסחא זו, כאשר המטריצה היא מסדר 2×2, ערך הדטרמיננטה מחושב באופן הבא: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

תכונות של דטרמיננטות ושיטת גאוס.

1. הכפלה של שורה בסקלר, מכפילה את הדטרמיננטה באותו הסקלר.
2. שינוי מיקום של שורה, משנה את סימן הדטרמיננטה.
3. הכפלת שורה והוספתה לשורה אחרת לא משנה את הדטרמיננטה.

מטריצה ריבועית הפיכה אם הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.
דטרמיננטה של מטריצה משוחלפת שווה לדטרמיננטה של המטריצה.
$\det(A) = \det(A) \cdot \det(B)$, לגבי חיבור זה לא נכון.